

# журнал<sup>©</sup> Квант июль 2007 №4 АВГУСТ 2007

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна) ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ  
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

**Ю.А.Осипьян**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбилин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегии*), П.А.Кожевников,  
В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегии*), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,  
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2007, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Лазер – замечательное достижение XX века (продолжение).  
*П.Крюков*  
8 Гипотеза Каталана. *В.Сендеров, Б.Френкин*  
11 Скидка 15 процентов. *А.Минеев*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 15 Ян Гевелий. *А.Васильев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М2051–М2055, Ф2058–Ф2062  
18 Решения задач М2026–М2035, Ф2043–Ф2047

## К М Ш

- 26 Задачи  
27 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
27 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
2006/07 учебного года  
28 Только ноль и единица. *Л.Шибасов, З.Шибасова*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Об одной замечательной прямой в треугольнике.  
*А.Карлюченко, Г.Филипповский*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Экстремальные выпуклые фигуры

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 35 Квантовые чудеса. *М.Каганов*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 39 Пропорциональность дифференциалов в физических  
задачах. *К.Рыб*  
42 Множество значений функции. *С.Лавренов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 47 Задачи LXX Московской математической олимпиады  
49 Избранные задачи Московской физической олимпиады  
52 Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина  
53 Международный турнир «Компьютерная физика»

- 56 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (7)

Нам пишут (16, 56)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I КВАНТ + DVD  
II Коллекция головоломок  
III Шахматная страничка  
IV Физики и математики на монетах мира

# Лазер — замечательное достижение XX века

П. КРЮКОВ

## Высокие мощности

Для увеличения энергии в импульсе и, соответственно, мощности требуется усиление. Лазер-усилитель — это, попросту говоря, лазер без резонатора. Усиление получается при пропускании лазерного излучения через активную среду либо путем последовательных проходов через несколько слоев активной среды (многокаскадное усиление), либо путем нескольких проходов через один и тот же слой (многопроходное усиление). Импульс, предназначенный для усиления, вырезается из непрерывной последовательности УКИ с помощью *электрооптического затвора*.

Однако усиление лазерного излучения в виде УКИ связано с принципиальной трудностью. Из-за малой длительности импульса мощность при сравнительно малой энергии импульса достигает такого уровня, при котором происходит повреждение материала активной среды собственным усиленным излучением. Так, при длительности импульса меньше 100 фс энергии импульса около  $10^{-3}$  Дж соответствует мощность свыше  $10^{10}$  Вт. При такой мощности эффект самофокусировки играет вредную роль. Излучение фокусируется внутри материала и вызывает его повреждение.

Для преодоления этого препятствия был изобретен замечательный способ, сущность которого заключается в следующем. Длительность импульса перед его усилением увеличивается во много раз (импульс «растягивается»). При этом мощность уменьшается во столько же раз. После этого «растянутый» импульс можно усиливать до уровня энергии, большего во столько же раз. Затем такой «растянутый» и усиленный импульс снова «сжимается» до первоначальной длительности. В результате мощность усиленного импульса соответственно возрастает.

Конкретно это делается следующим образом. Как указывалось раньше, длительность импульса увеличивается из-за дисперсии, а увеличенную таким образом длительность можно свести к первоначальному значению с помощью дисперсии противоположного знака в устройстве из двух призм. Вот такая операция растяжения и сокращения длительности и применяется в усилительных системах. При этом для повышения величины дисперсии используются не призмы, а дифракционные решетки. Они гораздо сильнее отклоняют лучи с разной длиной волны, и, соответственно, с ними

можно получить гораздо большее растяжение и последующее сжатие.

Схема экспериментальной установки, в которой используется эта техника, показана на рисунке 15. С

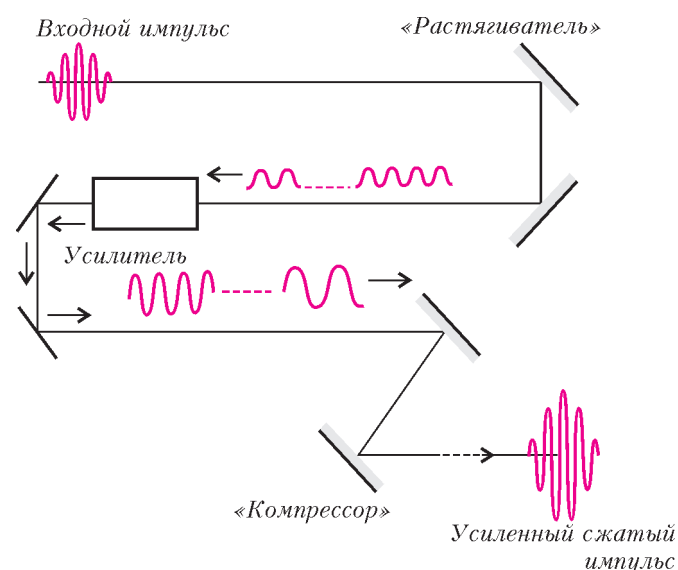


Рис.15. Схема установки для усиления УКИ

помощью пары дифракционных решеток («растягиватель») длительность фемтосекундного импульса увеличивается более чем в  $10^4$  раз. Энергия при этом уменьшается не более чем в 2 раза, но мощность уменьшается почти в  $10^4$  раз. Затем растянутый импульс направляется в усилительную систему, общий коэффициент усиления которой может достигать  $10^6 - 10^7$ . После усиления импульс проходит через вторую пару дифракционных решеток («компрессор»). Они настроены так, что компенсируют дисперсию первой пары, и длительность усиленного импульса снова становится близкой к первоначальной. Именно с помощью таких систем удается получать фемтосекундные импульсы с пиковыми мощностями вплоть до петаваттного уровня.

## Измерение длительности УКИ

Теперь следует рассмотреть вопрос в том, как же измерять длительности столь коротких импульсов. Обычно форму импульса светового излучения регистрируют, используя фотоэлектронные приборы (фотоэлементы, фотосопротивления, фотоумножители), которые преобразуют свет в электрические сигналы,

пропорциональные интенсивности света. Затем электрические сигналы регистрируются с помощью осциллографа. Временное разрешение такой методики (порядка 1 нс) ограничено полосой пропускания электрических цепей.

Для получения лучшего в 1000 раз разрешения, нужного для измерения УКИ, используются они сами. Конкретнее, используется эффект нелинейной оптики – генерация 2-й гармоники лазерного излучения. Это явление заключается в том, что при пропускании лазерного излучения через так называемый *нелинейный кристалл* некоторая часть излучения преобразуется в излучение с длиной волны в 2 раза меньше – 2-я гармоника частоты. При этом интенсивность излучения этой гармоники пропорциональна квадрату интенсивности лазерного излучения, проходящего через кристалл.

Схема устройства для измерения длительности УКИ, основанная на генерации 2-й гармоники, представлена на рисунке 16. Основной частью является хорошо известный в оптике *интерферометр Майкельсона*.

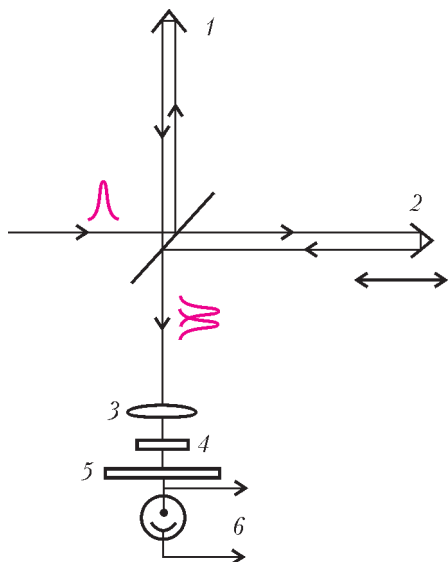


Рис.16. Схема измерения длительности УКИ: 1, 2 – отражатели (один с регулируемым перемещением); 3 – линза; 4 – нелинейный кристалл; 5 – фильтр для выделения 2-й гармоники; 6 – фотоприемник

Пучок света в виде УКИ разделяется полупрозрачным зеркалом на два равных по интенсивности пучка (плечи интерферометра). Каждый из них отражается обратно на полупрозрачное зеркало, причем один из отражателей может перемещаться с соответствующей задержкой света. После отражения от полупрозрачного зеркала пучки обоих плеч сводятся вместе (накладываются друг на друга) и могут интерферировать. Сложенные вместе пучки проходят нелинейный кристалл, где генерируется излучение 2-й гармоники, которое выделяется фильтром и регистрируется.

Посмотрим, как будет изменяться интенсивность регистрируемого сигнала при разных задержках. Пусть эта задержка больше длительности импульса. В этом случае каждый импульс отдельно генерирует излучение 2-й гармоники, и будет регистрироваться сигнал с

интенсивностью  $I_{2\omega} \sim (I_{\omega}^2 + I_{\omega}^2) = 2I_{\omega}^2$ , где  $I_{2\omega}$  – сигнал на второй гармонике, а  $I_{\omega}$  – сигнал на основной частоте. Пусть теперь задержка равна нулю, т.е. импульсы накладываются друг на друга. В этом случае происходит интерференция. При сложении амплитуд в фазе результирующая интенсивность возрастает не в 2, а 4 раза. Следовательно, сигнал второй гармоники  $I_{2\omega} \sim (4I_{\omega})^2 = 16I_{\omega}^2$ . При сложении амплитуд в противофазе интенсивность равна нулю. При задержке, отличной от нуля, но меньшей длительности импульса, будут складываться неравные амплитуды, и сигнал  $I_{2\omega}$  будет принимать промежуточные значения между  $16I_{\omega}^2$  и 0.

Зависимость сигнала 2-й гармоники от задержки одного импульса относительно другого имеет вид, показанный на рисунке 17. При задержках, больших длительности импульса, интерференция отсутствует, и наблюдается постоянный уровень сигнала.

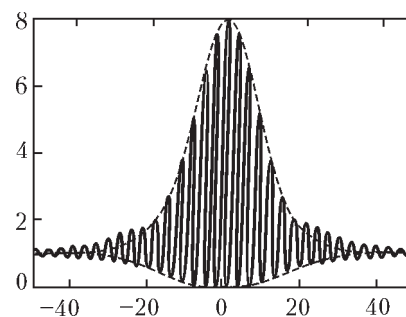


Рис.17. Автокорреляционная функция интенсивности

При полном совпадении сигнал возрастает в 8 раз, причем из-за интерференции наблюдается «изрезанность». Период интерференционной картины определяется длиной волны максимума спектра излучения. Анализ показывает, что ширина профиля зависимости интенсивности от времени задержки – эта зависимость называется *автокорреляционной функцией интенсивности* – однозначно связана с шириной профиля зависимости интенсивности в импульсе от времени (длительность импульса). С хорошей точностью можно считать, что первый профиль в 1,5 раза шире второго.

### Применение лазеров фемтосекундных импульсов

Из всего разнообразия использования в науке и технике лазеров УКИ рассмотрим лишь три примера. Один – основанный на ультракороткой длительности лазерного излучения, другой – на сверхвысокой интенсивности и третий – на уникальной особенности излучения фемтосекундного лазера непрерывного действия.

#### 1) Быстродействующая электроника

Стремление к миниатюризации и повышению быстродействия электронных схем приводит к интегральным схемам. При этом становится трудно исследовать прохождение коротких электрических сигналов по элементам схемы с помощью электронного осциллографа из-за искажений сигналов в проводах, подсоединяемых к схеме. Лазеры УКИ позволили успешно реализовать схему бесконтактного осциллографирования электрических сигналов с разрешением, лучшим чем 1 пс.

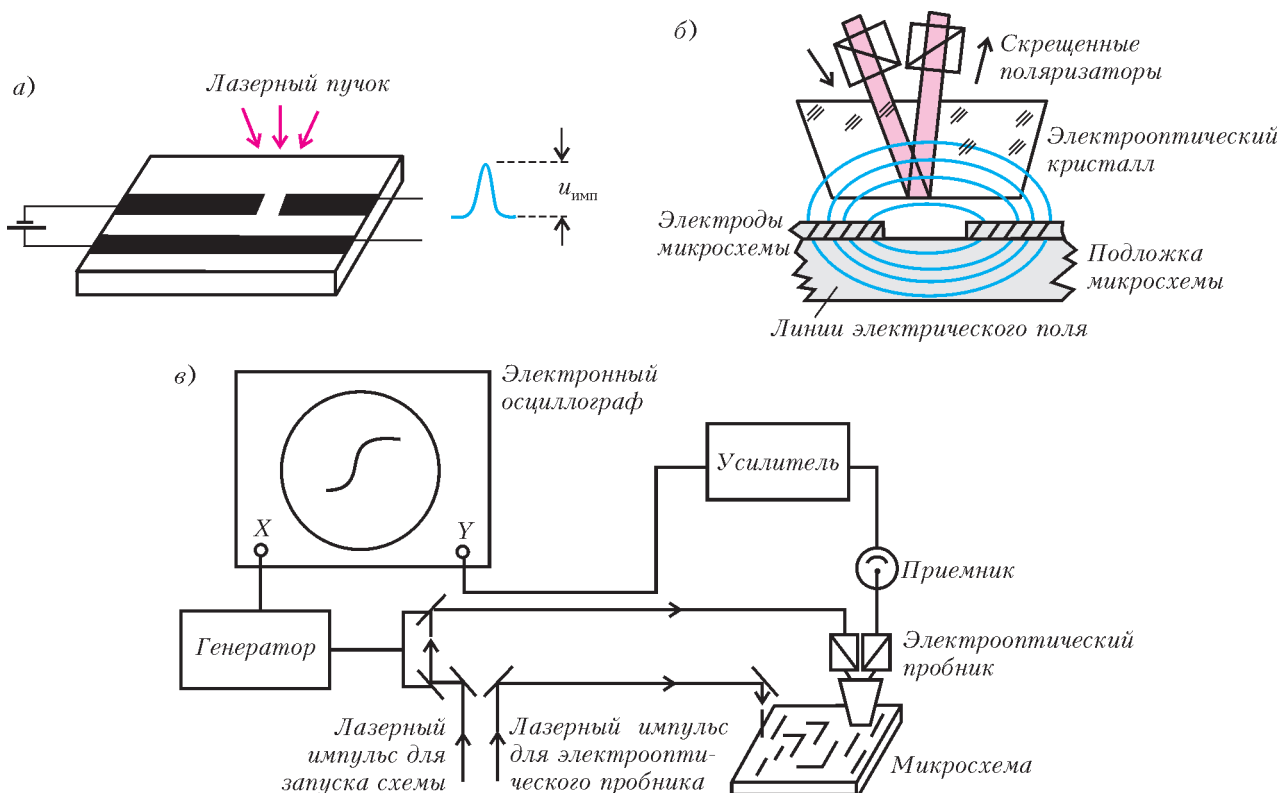


Рис. 18. Оптоэлектроника с использованием лазерных УКИ: а) оптоэлектронный ключ; б) принцип электрооптического стробирования электрического сигнала; в) оптоэлектронный осциллограф

Основная идея заключается в том, что один УКИ запускает электронную схему, а с помощью второго УКИ, задержанного на определенный интервал времени, измеряется электрический сигнал в нужной точке схемы. Существенной деталью является *оптоэлектронный ключ*, с помощью которого запускается исследуемая схема. Основой служит пластинка из полупроводника с высоким удельным сопротивлением, на которой нанесены проводящие металлические полосы – электроды (рис.18,а). Верхняя полоска имеет разрез в виде щели, которая разрывает электрическую цепь. К концам электродов можно подключить источник напряжения. При освещении полупроводника через щель лазерным излучением в виде УКИ с определенной длиной волны в поверхностном слое полупроводника за время действия облучения возникает большое число носителей тока (*электроно-дырочных пар*), и полупроводник становится проводящим. Таким образом осуществляется быстрое, равное длительности УКИ, замыкание электрической цепи. В отсутствие света происходит самопроизвольное и достаточно быстрое уничтожение носителей (рекомбинация электронов и дырок), а значит, и восстановление высокого сопротивления за время, меньшее 1 пс. Получается, что можно быстро включить и выключить напряжение, т.е. сформировать ультракороткий электрический импульс, запускающий интегральную схему.

Регистрация электрических импульсов проводится методом *электрооптического стробирования* с помощью *электрооптического пробника* (рис.18,б). Этот

пробник основан на эффекте двойного лучепреломления в электрооптическом кристалле при приложении к нему электрического поля. Если такой кристалл помещен между скрещенными поляризаторами, то пропускание света через них будет зависеть от напряженности электрического поля. При прохождении по цепи электрического импульса вокруг проводника возникает быстро изменяющееся электрическое поле. Оно проникает в близко расположенный кристалл, и по пропусканию света через скрещенные поляризаторы можно определить величину электрического поля. Если это свет в виде УКИ, то электрическое поле регистрируется лишь в момент прохождения УКИ через кристалл.

Изменяя величину задержки между запуском исследуемой электронной схемы и сигналом наведенного двойного лучепреломления, можно измерить величину электрического сигнала в зависимости от времени задержки. Таким образом получается осциллограмма электрического сигнала, распространяющегося в интегральной схеме.

На основе такого принципа был создан *стробоскопический оптоэлектронный осциллограф*. Его принципиальная схема изображена на рисунке 18,в. Использовался очень маленький электрооптический кристалл, на нижнюю грань которого нанесено диэлектрическое отражающее покрытие. Так как запуск исследуемой схемы и регистрация сигнала осуществляются одним и тем же лазерным УКИ, исключается «дрожание» сигнала относительно запуска. Это позволяет достаточно точно регистрировать электрические сигналы.

## 2) Генерация импульсов рентгеновского излучения аттосекундной длительности

Достигнутая длительность импульса 5 фс близка к периоду световой волны – длине волны 0,8 мкм соответствует период 2,7 фс. Чтобы получить длительность импульса излучения еще меньше, нужно, чтобы период и длина волны были короче. С помощью лазерного излучения в виде импульсов в несколько периодов и с интенсивностями, достигающими  $10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>, удается получать вспышки уже не оптического, а рентгеновского излучения с длинами волн до 3 нм и с длительностью до 200 ас (1 аттосекунда =  $10^{-18}$  секунд). С этой целью лазерное излучение фокусируется в одноатомный газ (гелий или криптон), атомы которого сильно удерживают электроны. На научном языке это означает, что атомы имеют высокий потенциал ионизации (напряжение электрического поля, при котором электрон отрывается от атома).

Физическая картина взаимодействия электромагнитной волны с атомом в течение ее периода с максимальной амплитудой представлена на рисунке 19. Максимальная напряженность электрического поля световой

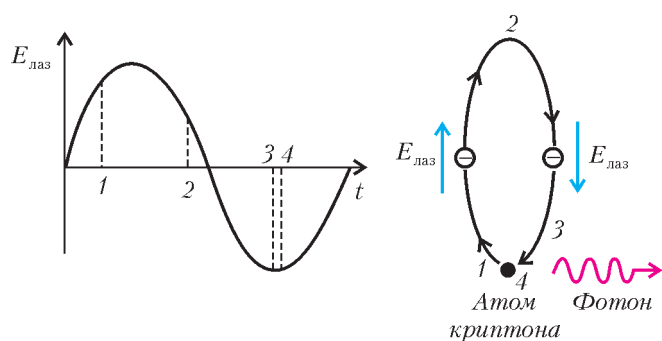


Рис.19. Взаимодействие световой волны сверхмощного излучения фемтосекундного лазера с атомом криптона

волны превышает ту, что удерживает электрон в атоме. В момент 1 электрон отрывается от атома (происходит ионизация полем световой волны) и начинает ускоряться. Но прежде чем он удалится на значительное расстояние от своего атома, превратившегося в ион, поле в волне изменяет знак на противоположный (момент 2). Теперь нарастающее электрическое поле ускоряет электрон обратно к иону, причем на электрон действуют как напряженность поля световой волны, так и кулоновское притяжение положительно заряженного иона. В результате ускоренный электрон ударяет ион и вызывает испускание фотона, подобно тому как это происходит в рентгеновской трубке. Максимальная энергия фотона равна кинетической энергии электрона в момент удара и может достигать, как показывают расчеты, 300 эВ, что соответствует длине волны фотона 3 нм. В область фокуса лазерного излучения попадает большое число атомов, поэтому происходит согласованное испускание многих фотонов. Сам процесс испускания при этом продолжается доли периода световой волны. Таким образом получается аттосекундная длительность вспышки и когерентность испускаемого излучения.

## 3) Прецизионное измерение частоты световой волны (оптические часы)

До сравнительно недавнего времени лазеры, генерирующие ультракороткие импульсы и имеющие широкий спектр, соответствующий длительности импульса, и лазеры, генерирующие высоко монохроматичное излучение с очень узким спектром, рассматривались как взаимно исключаящие системы. Лазеры УКИ предназначались для исследований, связанных с предельно короткими интервалами времени, а лазеры со сверхузким спектром – для прецизионного измерения текущего времени в схемах сверхточных часов. С появлением фемтосекундных лазеров, работающих в непрерывном режиме, произошло удивительное слияние этих, казалось бы, совершенно различных направлений.

От глубокой древности до наших дней человек решает проблему измерения времени. В результате создаются все более точные часы и способы измерения все более коротких интервалов времени. Для измерения текущего времени используется стабильный периодический процесс – тогда измерение времени сводится к подсчету числа периодов за измеряемый интервал. Для того чтобы определить точность хода часов, нужно сравнить их с эталоном. Это означает, что нужно пересчитать число периодов эталона и сравниваемых часов, пока не получится различие в один период. Величина, обратная числу периодов, и будет определять точность. Очевидно, что чем выше частота, тем меньший интервал времени потребуется для такого сравнения. Поэтому стремятся использовать периодический процесс не только со стабильной, но и с высокой частотой.

С давних пор в качестве стабильного периодического процесса принимается вращение Земли. Но его период слишком велик, и поэтому частота вращения Земли сопоставляется с более высокой частотой колебаний маятника – он стабилизируется по частоте вращения Земли. Затем на смену часов с маятником пришли кварцевые часы со значительно более высокой и стабильной частотой.

Успехи в спектроскопии и квантовой теории показали, что колебания в спектрах атомов и молекул могут быть использованы как стандарты частоты. В качестве такого стандарта была выбрана линия спектра (сверхтонкая структура) атома цезия  $Cs^{133}$ , частота которой равна 9192631770 Гц. Она принята в качестве международного эталона секунды. Эта частота попадает в диапазон, в котором измерения частоты производятся методами радиоэлектроники.

Достижения в области лазеров позволили получить чрезвычайно узкие линии – вплоть до значения  $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-18}$  на частоте  $10^{15}$  Гц, что, в принципе, позволило бы построить сверхточные часы. Высокая оптическая частота является несомненным преимуществом. Так, сравнение двух цезиевых часов (частота порядка  $10^{10}$  Гц) с точностью на уровне  $10^{-15}$  требует нескольких дней, сравнение же двух оптических часов (частота порядка  $10^{14} - 10^{15}$ ) с таким же уровнем точности занимает всего лишь несколько секунд. Однако, для того чтобы делать часы на основе лазерных

волн, необходимо измерять их частоты, т.е. сопоставлять их с эталоном секунды. Но в оптике, в отличие от радиофизики и электроники, не существует прямых методов измерения частоты, там измеряют длины волн. Казалось бы, нет проблемы определить частоту, зная длину волны, поскольку  $\nu = c/\lambda$ , но скорость света  $c$  сама должна быть измерена с соответствующей точностью. Проблема точного измерения времени как раз и связана со стремлением более точного измерения  $c$ .

Лазеры фемтосекундных импульсов дали замечательный способ сопоставления частоты лазерной сверхузкой линии с частотой цезиевого стандарта. Обсудим сущность этого способа на примере лазера, работающего в непрерывном режиме, т.е. испускающего периодическую последовательность импульсов (рис. 20,а). Как было показано, эта последовательность получается в результате сложения множества волн с одинаковыми интервалами частот между ними. Иными словами, спектр такого излучения представляет «гребенку» эквидистантно расположенных дискретных частот (рис.20,б). Ширина всего спектра  $\Delta\nu$  определяется длительностью импульса:  $\Delta\nu \sim 1/\tau$ , а ин-

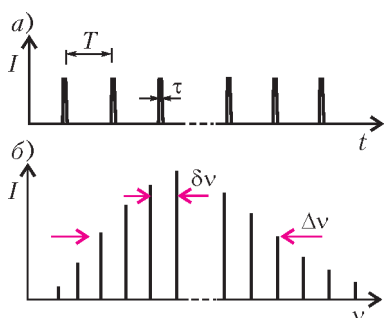


Рис.20. Временная (а) и спектральная (б) характеристики фемтосекундного лазера непрерывного действия

тервал между «зубьями» гребенки  $\delta\nu$  – их периодом в последовательности:  $\delta\nu = 1/T$ . Как мы видели, этот период задается расстоянием между зеркалами резонатора, поэтому путем перемещения одного из зеркал можно регулировать и стабилизировать частотный интервал гребенки. Частота этого интервала лежит в области долей и единиц гигагерца, и ее можно сопоставить с частотой эталона секунды. Таким образом, излучение фемтосекундного лазера непрерывного действия дает своеобразную «линейку» оптических частот «делениями», значения которых можно точно определить по отношению к стандарту частоты.

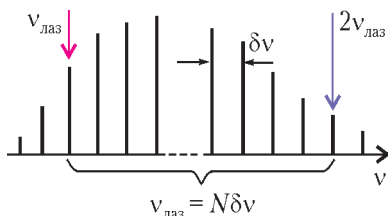


Рис.21. Схема измерения частоты лазерной линии путем пересчета делений «линейки» оптических частот

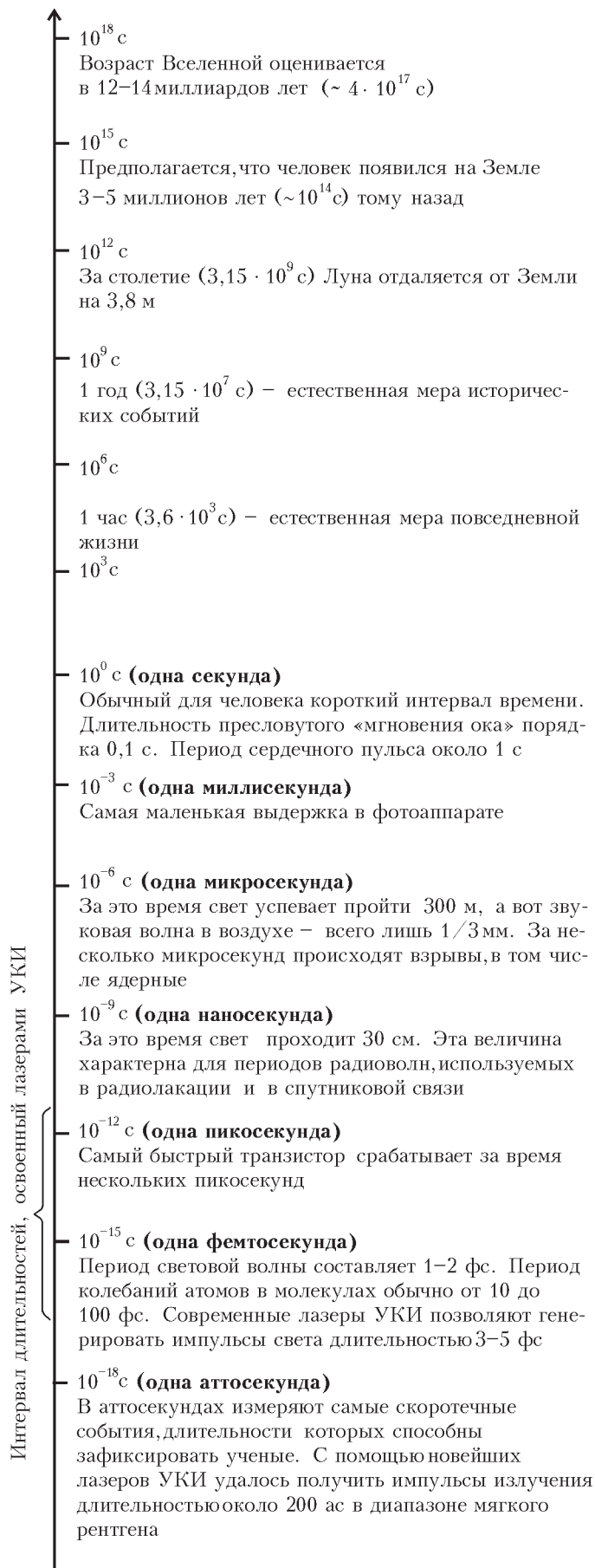


Рис.22. Шкала времен

С помощью такой линейки можно измерить частоту узкой лазерной линии  $\nu_{\text{лаз}}$ . Пусть эта частота попадает на красный край гребенки, а ее 2-я гармоника – на фиолетовый край, как показано на рисунке 21. Тогда при соответствующей настройке длины резонатора фемтосекундного лазера выполняется соотношение  $2\nu_{\text{лаз}} - \nu_{\text{лаз}} = \nu_{\text{лаз}} = N\delta\nu$ , и измерение лазерной частоты сводится к подсчету числа «зубьев» гребенки. Этот принцип, который, как было указано ранее, отмечен Нобелевской премией, лежит в основе создания сверхточных оптических часов.

Подводя итоги, отметим, что с помощью лазеров можно исследовать исключительно малые промежутки времени и измерять текущее время с чрезвычайно высокой точностью. Согласно современным воззрениям, возраст нашей Вселенной около 20 миллиардов лет. Если бы сверхточные оптические часы, которые создаются в настоящее время, были запущены в момент «рождения» Вселенной, показания их расходились бы не более чем на несколько секунд.

Отметим, что сверхточные часы (с точностью порядка  $10^{-14} - 10^{-16}$ ) являются необходимой частью

навигационной системы ГЛОНАСС, которая позволяет определять координаты с точностью до долей метра.

На рисунке 22 показана шкала времен, на которой отмечены характерные события и указана область, измерения в которой проводятся с помощью лазеров.

### Заключение

Работа по лазерам и их применениям интенсивно развивается. Важнейшей частью этой работы является стремление усовершенствовать сами лазеры, сделать их более эффективными и доступными. Это, в свою очередь, будет способствовать развитию различных научных и технических применений. В области фундаментальной науки рассматриваются такие амбициозные проекты, как обнаружение гравитационных волн или выяснение того, не изменяются ли мировые физические константы с течением времени (гипотеза Дирака).

Любознательные читатели, желающие посвятить себя науке и технике, имеют шанс принять участие в этой увлекательной и перспективной деятельности.

## КВАНТ + DVD

**Мы рады сообщить нашим читателям, что вышел в свет электронный архив журнала «Квант» с 1970 по 2006 год.**

**Материалы, опубликованные в журнале «Квант» за многие годы его существования, бесценны. И это не пустые слова. Не одно поколение «прошедших» через «Квант» молодых людей, как из числа занявших сегодня достойное место в мировой науке, так и пополнивших лучшие ряды сегодняшнего учительства, с благодарностью вспоминают журнал «Квант», который в их жизни сыграл роль путеводной звезды, определил выбор в пользу фундаментальных знаний.**

**Сегодня в нашем обществе явно прослеживается тенденция возрождения истинных ценностей, витает в воздухе потребность в восстановлении реальных приоритетов в образовании, пробуждается интерес к фундаментальным знаниям. Поэтому мы решили на базе громадного позитивного опыта, накопленного творческим коллективом журнала «Квант», создать адекватный современному состоянию и тенденциям развития информационных технологий научно-образовательный продукт. Мы уверены, что он, во-первых, откроет всем желающим путь к уникальному архиву журнала «Квант», а во-вторых, для кого-то сыграет решающую роль в выборе будущей профессии.**

*Диск можно приобрести в редакции журнала «Квант».*

*Наши координаты – на последней странице журнала.*

*Пишите, звоните. Мы вас ждем.*

# Гипотеза Каталана

В. СЕНДЕРОВ, Б. ФРЕНКИН

**В**ЫПИШЕМ ПОДРЯД НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ СТЕПЕНЯМИ (БОЛЬШИМИ ПЕРВОЙ) НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. Получается последовательность: 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, ... Числа 8 и 9 выделены не случайно – это соседние натуральные числа. Возникает вопрос: существуют ли еще соседние степени натуральных чисел?

Впервые этот вопрос поставил бельгийский математик Э. Каталан: в 1844 году он высказал предположение, что уравнение

$$x^y - z^t = 1 \quad (1)$$

имеет единственное решение  $x = 3, y = 2, z = 2, t = 3$  в натуральных числах, больших единицы.

Эта гипотеза продержалась почти 160 лет, хотя многие известные математики пытались найти подходы к ее доказательству.

В 2003 году румынский математик П. Михайлеску доказал справедливость гипотезы Каталана. Доказа-

тельство Михайлеску весьма сложно и неэлементарно и потому не может быть изложено на страницах нашего журнала. Однако сам результат связан со многими математическими фактами и задачами, которые могут быть изучены в рамках элементарной математики. Например, из доказанной Михайлеску теоремы немедленно получается ответ на вопрос пункта а) задачи М2032 («Квант» №1 за 2007 г.; решение опубликовано в этом номере журнала).

## История вопроса

Еще в XIV веке Леви бен Гершон, известный также как Лео Гебракус, доказал, что уравнение  $3^x - 2^y = \pm 1$  имеет единственное решение  $x = 2, y = 3$  в натуральных числах, больших 1. В 1657 году Френикль де Бесси решил в натуральных числах уравнение

$$x^2 - p^y = 1, \text{ где } y > 1, \text{ а } p - \text{ простое число.}$$

В 1738 году Л. Эйлер доказал, что уравнение

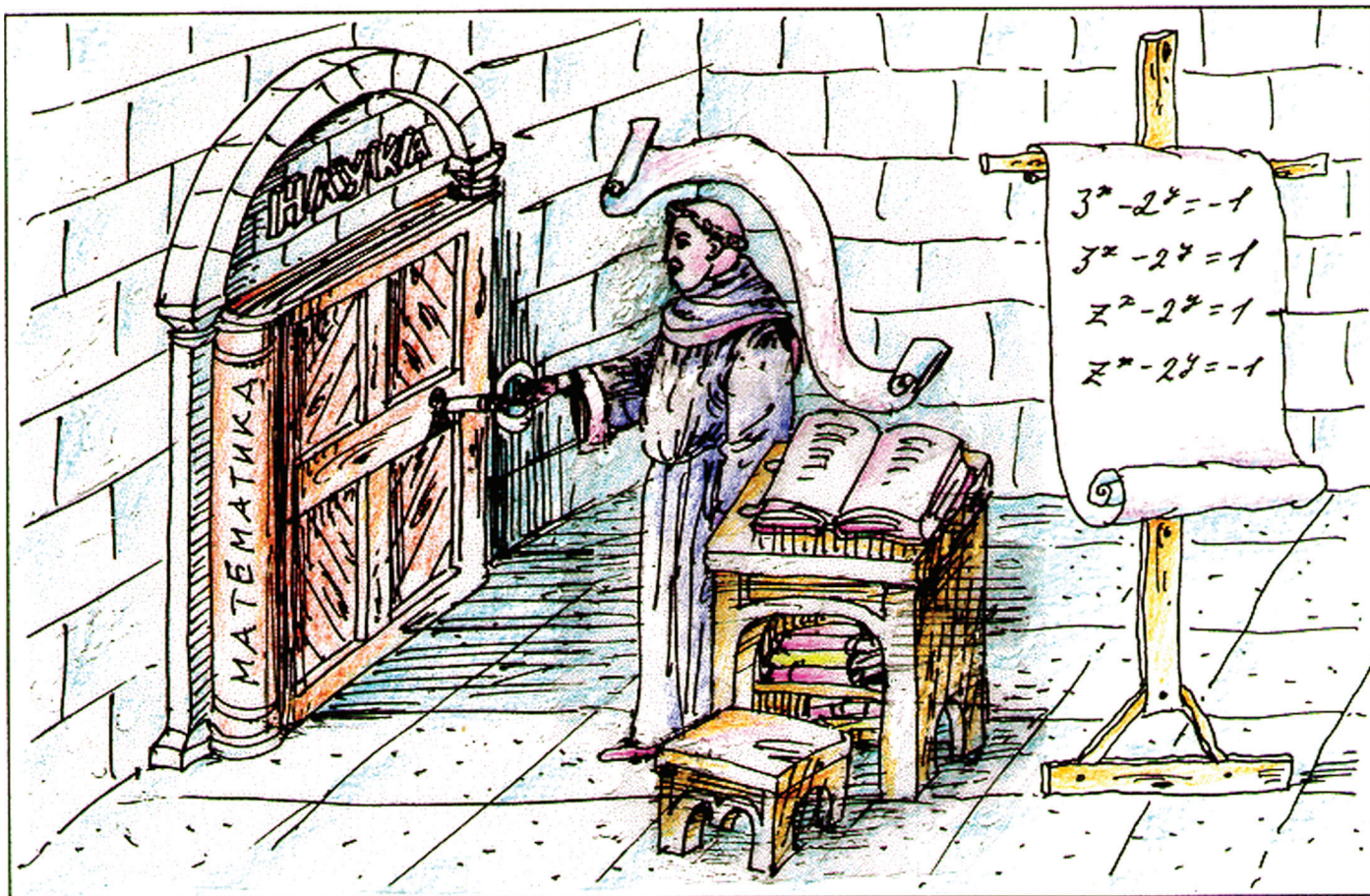


Иллюстрация В. Иванюка



$x^3 + 1 = y^2$  имеет единственное решение  $(2; 3)$  в натуральных числах (о решении этого уравнения и его приложениях см. в решении задачи M2025 в третьем номере нашего журнала за 2007 г.).

В 1850 году В.А.Лебег доказал неразрешимость уравнения  $x^y - z^2 = 1$  в целых числах, больших единицы, при условии  $y \neq 3$ . А в 1921 году Т.Нагель полностью исследовал уравнения  $x^3 - z^t = 1$  и  $x^y - z^3 = 1$  при  $y \neq 2$ .

В результате были изучены три случая общего уравнения Каталана (1) при конкретных значениях показателей:

- 1)  $x^3 - z^t = 1$ ,
- 2)  $x^y - z^3 = 1$ ,
- 3)  $x^y - z^2 = 1$ .

Из них наиболее важным оказался последний: при решении общей проблемы особую роль играет ситуация, когда один из показателей четен.

Заметим еще, что полное рассмотрение третьего случая можно провести с помощью так называемых *целых гауссовых чисел*. Достаточная для этого информация содержится в статье В.Сендерова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» №3 за 1999 г.). Впрочем, эта задача далеко не проста.

Намного сложнее предыдущих оказалась ситуация при четных  $y$ . Для уравнения  $x^4 - z^t = 1$  задача была решена С.Сельбергом в 1932 году, а окончательное решение уравнения  $x^2 - z^t = 1$  было получено лишь в 1960 году китайским математиком Ко Чао.

Далее мы рассмотрим некоторые частные случаи уравнения Каталана (в основном когда оба показателя степени нечетны). Внимательный читатель может заметить, что на математических олимпиадах иногда встречаются задачи, являющиеся частными случаями уравнения Каталана, так что знакомство с элементарными методами их решения может и в этой ситуации оказаться полезным. Пока же попробуйте решить следующие упражнения.

#### Упражнения

1. Решите в целых числах, больших чем 1, уравнения:

- а)  $3^x - 2^y = -1$ ,
- б)  $3^x - 2^y = 1$ ,
- в)  $z^x - 2^y = 1$ ,
- г)  $z^x - 2^y = -1$ .

2. Найдите все тройки  $(a, b, y)$ , где  $a, y \in \mathbf{N}$ ,  $a, b$  – простое число, такие, что  $a^2 - b^y = 1$ .

#### Некоторые предварительные результаты

Для полного доказательства гипотезы Каталана достаточно доказать ее для уравнения

$$x^p - y^q = 1, \quad (2)$$

где оба натуральных числа  $x$  и  $y$  больше 1, а  $p$  и  $q$  – различные простые числа.

**Упражнение 3.** а) Докажите это.

б\*) Пусть  $x^y - z^t = 1$ , где  $x, z \in \mathbf{N}$ ,  $y, t \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ ,  $y, t$  нечетны. Докажите, что числа  $x$  и  $z$  составные.

Напомним некоторые обозначения. Через  $(a, b)$  мы будем обозначать наибольший общий делитель натуральных чисел  $a$  и  $b$ . Запись же  $a|b$  означает, что  $a$  является делителем  $b$  (читается:  $a$  делит  $b$ ).

Нам понадобится следующее утверждение.

*Если  $x$  и  $y$  – взаимно простые натуральные числа, то*

а)  $\left( \frac{x^n + y^n}{x + y}, x + y \right) | n$  при любом нечетном натуральном  $n$ ;

б)  $\left( \frac{x^n - y^n}{x - y}, x - y \right) | n$  при любом натуральном  $n$  и  $x > y$ .

**Упражнение 4.** Докажите это.

Это простое утверждение позволяет разбить множество всех четверок, удовлетворяющих уравнению (2), на две группы.

**Случай I.** Если  $\left( p, \frac{x^p - 1}{x - 1} \right) = 1$ , то

$$x - 1 = r^q, \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = s^q, \quad y = rs,$$

где  $r$  и  $s$  – некоторые натуральные числа.

**Случай II.** Если  $\left( p, \frac{x^p - 1}{x - 1} \right) = p$ , то

$$x - 1 = p^{q-1} a^q, \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = p v^q, \quad y = p a v,$$

где  $a, v$  – некоторые натуральные числа.

**Упражнение 5.** Докажите эти равенства.

В случае нечетного  $q$  аналогичные равенства можно получить, рассматривая выражение  $\frac{y^q + 1}{y + 1}$ .

#### Упражнения

6. Решите уравнения:

- а)  $3^x = y^z + 1$ ,
- б)  $3^x = y^z - 1$ ,

где  $x, y, z \in \mathbf{N}$ ,  $z > 1$ .

7. а) Решите уравнение  $(x + 1)^y + 1 = x^z$ , где  $x, y, z \in \mathbf{N}$ ,  $y > 1$ .

б) Решите уравнение  $(x + 1)^y = 1 + x^z$ , где  $x, y, z \in \mathbf{N}$ ,  $y > 1$ .

в) (М.Хампел, А.Шинцель) Докажите гипотезу Каталана для случая, когда основания степеней различаются на 1.

#### Теорема Касселса–Нагеля

Фундаментальный прорыв в доказательстве гипотезы Каталана произошел в середине двадцатого века, спустя более чем столетие со времени постановки задачи: Касселс полностью доказал ее в случае I. Именно, для нечетных показателей Касселс доказал следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $p$  и  $q$  – простые числа;  $p > q \geq 2$ ;  $a^p - b^q = \pm 1$ , где  $a$  и  $b$  – целые числа, большие чем 1. Тогда  $a$  делится на  $q$ ,  $b$  делится на  $p$ .

Случай  $q = 2$  относится к уравнению  $a^p - b^q = -1$ :

когда формулировалась и доказывалась теорема, неразрешимость уравнения  $a^p - b^2 = 1$  была уже окончательно установлена. При этом утверждение  $q|a$  было доказано в работе 1953 года, а гораздо более сложное  $p|b$  – семь лет спустя. Для случая  $q = 2$  теорему доказал Т.Нагель в работах 1921 и 1934 годов.

**Упражнение 8.** Выведите из теоремы Касселса невозможность случая I.

Итак, если  $(x, y, p, q)$  – решение уравнения (2),  $p, q$  – нечетные простые числа, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} x - 1 &= p^{q-1}a^q \text{ и } \frac{x^p - 1}{x - 1} = pv^q, \quad y = pav, \\ y + 1 &= q^{p-1}b^p \text{ и } \frac{y^q + 1}{y + 1} = qu^p, \quad x = qbu \end{aligned} \quad (3)$$

при некоторых натуральных  $a, v, b, u$ .

Заметим, что теорема Касселса, наряду с некоторыми более ранними результатами, позволяла уже утверждать, что гипотеза Каталана может оказаться неверной лишь при весьма больших основаниях степеней.

**Упражнение 9\*** (А.Роткевич). Пусть  $x, y \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ ;  $z, t \in \mathbf{P} \setminus \{2\}$ ;  $x^z - y^t = 1$ ;  $(x, y, z, t) \neq (3, 2, 2, 3)$ . Тогда  $x, y > 10^6$ . Докажите это

Таким образом, теорема Касселса оставляла проблему открытой лишь для чисел  $x^z > (10^6)^5$ ,  $y^t > (10^6)^5$ . Заметим, что еще недавно было весьма сложно даже с помощью компьютеров оперировать числами, порядок которых превосходит  $2^{32}$ .

Опираясь на равенства (3) и используя современные мощные алгебраические и аналитические методы, Михайлеску и получил свое замечательное доказательство.

### О задаче M2032

Утверждение пункта а) задачи M2032 представляет собой ослабленный вариант гипотезы Каталана. Одним из таких ослаблений индуцировано и утверждение пункта б).

В 1956 году в курсе теории чисел В.Ж.Левека отмечалось: «Не доказано даже, что три последовательных целых числа не могут быть степенями...» В 1960 году в статье выдающегося польского математика В.Серпинского о нерешенных проблемах арифметики был сформулирован следующий вопрос: «Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых является степенью натурального числа с натуральным показателем, большим чем 1?» Ответу на этот вопрос мы предпослём несколько элементарных утверждений о тройках  $(n, n + 1, n + 2)$  натуральных чисел.

*Правильной степенью* называют число вида  $a^b$ , где  $a, b \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ .

#### Упражнения

**10.** Пусть  $n, n + 2$  – правильные степени. Докажите, что  $(n, n + 2) = 1$ .

**11.** Пусть  $(2k)^2 - z^m = 1$ , где  $k, z, m \in \mathbf{N}$ . Докажите, что  $m = 1$ .

**12.** Пусть  $x^m - (2k - 1)^2 = 1$ , где  $x, m, k \in \mathbf{N}$ . Докажите, что  $m = 1$ .

**13.** Пусть  $n, n + 1, n + 2$  – правильные степени. Докажите, что

а)  $n + 1 \neq t^2$ ,

б)  $n \neq t^2$ ,

где  $t \in \mathbf{N}$ .

Вернемся к вопросу Серпинского. Отрицательный ответ на него дал в 1961 году польский математик А.Маковский. Приведем его доказательство. Без потери общности можно считать, что показатели степеней, упомянутые в задаче, – простые числа. Покажем, что система уравнений

$$\begin{cases} x^p - y^q = 1, \\ y^q - z^r = 1 \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах  $x, y, z$  и простых числах  $p, q, r$ .

Пусть  $x, y, z, p, q, r$  удовлетворяют этой системе. По теореме Касселса имеем  $q|x, q|z$ . Отсюда  $q|x^p - z^r = 2$ , и  $q = 2$ . Первое уравнение принимает вид  $x^p = y^2 + 1$ . Но это уравнение, как показал Лебег, не имеет целочисленных решений с положительным  $y$ . Отсюда сразу вытекает ответ на вопрос Серпинского.

Заметим, что провести доказательство можно и без использования результата Лебега–Нагеля: нечетность  $q$  и  $r$  сразу следует из упражнения 13, а  $q|x, q|z$  сразу приводят к противоречию с упражнением 10.

Заметим также, что *две* правильные степени в тройку  $(n, n + 1, n + 2)$  входить все-таки могут:  $(5^2, 26, 3^3)$ . Авторам неизвестно, существуют ли другие тройки с этим свойством. Во всяком случае, при  $n \leq 2147483645$  таких троек нет.

### Об антипростых числах

Напоследок коснемся антипростых чисел – естественного обобщения фигурирующих в проблеме Каталана правильных степеней. Мы называем натуральное число *антипростым*, если каждый его простой множитель входит в разложение с показателем, большим 1. Легко видеть, что в натуральном ряду не могут идти подряд четыре антипростых числа.

**Упражнение 14.** Докажите это.

В решении задачи M2032 мы рассматривали тройки  $(n - 1, n, n + 1)$  натуральных чисел, в каждой из которых есть два антипростых числа. Мы показали, что среди этих троек бесконечно много таких, в которых  $n - 1$  и  $n + 1$  – антипростые числа, и бесконечно много таких, в которых число  $n$  – одно из антипростых. Могут ли все три числа  $n - 1, n, n + 1$  быть антипростыми? Ответ авторам неизвестен. Во всяком случае, среди чисел до 2000000 таких троек нет.

# Скидка 15 процентов

А.МИНЕЕВ

**В** ПОВЕСТИ Н.НОСОВА «ВЕСЕЛАЯ СЕМЕЙКА» есть все от хорошего детектива – интрига, динамичный сюжет, жертвы, момент отчаяния и, наконец, счастливый финал. Как вы, наверное, помните, речь в ней идет о двух школьниках, Коле и Мише, которые задумали построить инкубатор и вывести цыплят из куриных яиц, и о том, что же из этого вышло.

Эта повесть для младшего школьного возраста оказалась любопытной тем, что в ней *детально* описаны все тонкости процесса «высиживания» (так в жизни) или «инкубации» (так в повести) цыплят из яиц. Данных, приведенных в книге, вполне достаточно, чтобы сформулировать и решить ряд интересных физических задач и, кроме того, сделать несколько обобщений и попытаться объяснить некий возникающий парадокс.

Чтобы напрасно не мучить читателя, сформулируем один из этих парадоксов сразу. Дело в том, что в течение периода инкубации яйцо теряет 15% своей массы. Казалось бы, ну и что? Оказывается, эта величина относительной потери массы, 15%, одинакова для яиц *всех* живущих на Земле птиц – как для куриного яйца массой 60 грамм, так и для яйца колибри массой 0,2 г и даже для яйца королевского страуса массой 1,5 кг. Этот парадокс и нашел отражение в заглавии, которое сформулировано на современный «рыночный» лад – «Скидка 15 процентов».

Итак, постараемся пройти по страницам повести «Веселая семейка» с ручкой и калькулятором, делая комментарии и оценки, затем обобщим полученные результаты, а в конце нашего рассказа постараемся применить полученные знания для самой крупной птицы, которая когда-либо жила на Земле. Масса этой слоновой птицы, или эпиорниса, обитавшей в районе Мадагаскара, составляла 500 кг, ее высота достигала 3 м, а яйцо имело массу около 10 кг.

Соответствующие величины масс для ряда различных птиц приведены в таблице (эти данные заимствованы из «Новейшего справочника необходимых знаний (от альфы до омеги)»). Из повести «Веселая семейка» будем использовать некоторые цитаты в качестве эпиграфов к отдельным разделам.

Таблица

Птица	Масса птицы	Масса яйца
Слоновая птица (эпиорнис)	500 кг	10 кг
Страус	90 кг	1,5 кг
Императорский пингвин	45 кг	500 г
Лебедь-шипун	10 кг	350 г
Белый аист	3 кг	115 г
Серебристая чайка	1,5 кг	90 г
Домашняя курица	2,5 кг	60 г
Ворон	1,2 кг	20 г
Сорока	300 г	10 г
Скворец	90 г	6 г
Воробей	35 г	3 г
Красная колибри	1,6 г	0,2 г

## Температура

– В инкубаторе должна быть все время одинаковая температура – тридцать девять градусов. – Почему тридцать девять? – Потому что такая температура бывает у курицы, которая сидит на яйцах.

– Разве у курицы бывает температура? – говорю я. – Температура бывает у человека, когда он болен.

А действительно, почему 39 °С? Может, у курицы в момент высиживания *повышенная* температура (как



предположил Коля в повести)? Оказывается, нет. Ведь это только у плацентарных млекопитающих (к которым принадлежим и мы) нормальная температура тела меняется в пределах 36–37 °С. У сумчатых (пример – кенгуру) она составляет 34–36 °С, у однопроходных млекопитающих (утконос) уже 30–31 °С. А вот у птиц нормальная температура тела существенно выше и составляет 39–41 °С. Таким образом, температура высиживания 39 °С является естественной температурой тела птицы.

Как создать и поддерживать постоянную температуру в инкубаторе? В повести была использована большая консервная банка с водой, которая нагревалась снизу с помощью тепла от электрической лампочки. От банки была проведена трубка к фанерной коробке с яйцами. Нагретая вода проходила по трубке и обогревала ящик. В принципе, такая конструкция может поддерживать постоянные температурные условия в течение всего периода инкубации. Но осуществимо ли это в курятнике или на вольной природе?

Нет. И в книге Носова на эту тему есть полезное рассуждение учительницы Марьи Петровны, сделанное уже после того, как эксперимент успешно закончился: «Зародыши могут выдержать довольно длительное охлаждение, – сказала Марья Петровна. – Ведь наседка не сидит все время на яйцах. Раз в день она сходит с гнезда для того, чтобы покормиться, и яйца остывают. В инкубаторах тоже остужают яйца раз в день, чтобы зародыши развивались, как в природных условиях, но гораздо опаснее их перегреть...»

Итак, наседка иногда ненадолго покидает гнездо (курица – раз в день, грубо – на час). Кроме того, время от времени яйца нужно переворачивать. На эту тему в повести характерна следующая перепалка между Колей и Мишей: «Ты зачем инкубатор открыл? Может быть ты думаешь, что цыплята на другой день выведутся? – Ничего я не думаю, – говорю я и хочу объяснить, что яйца нужно поворачивать через каждые три часа».

Действительно, курица нагревает яйцо только с одной стороны, и чтобы перепад температур был невелик, яйцо нужно периодически поворачивать. Этот перепад должен быть примерно таким же, как за время отсутствия наседки.

### Длительность высиживания, влажность и вентиляция

*Градусник все время исправно показывал 39 градусов. – Хорошо идет дело! – радовался Мишка. – Если все обойдется благополучно, то через 21 день у нас будут цыплята. Целых 12 штук. Веселая будет семейка.*

И действительно, время, за которое вылупляются цыплята, составляет 21 день.

Для нескольких сотен видов птиц была исследована зависимость длительности высиживания в инкубаторе  $t_{\text{инк}}$  от массы яйца  $M_{\text{яйца}}$ , которая может быть представлена таким усредненным соотношением:

$$t_{\text{инк}} = 12 \cdot M_{\text{яйца}}^{0,22},$$

где время измеряется в сутках, а масса – в граммах.

Отметим еще некоторые условия, которые связаны с поддержанием жизнедеятельности в гнезде или инкубаторе: из яйца испаряется вода, туда поступает кислород и оттуда отводится углекислый газ. По этому поводу приведем следующие высказывания в повести:

«В инкубаторе должен быть влажный воздух, потому что если воздух будет сухой, то из яиц сквозь скорлупу будет испаряться много жидкости и зародыши могут погибнуть. Поэтому в инкубатор всегда помещают сосуды с водой»;

«Потом Мишка принес сверло и просверлил в инкубаторе несколько маленьких дырочек, чтобы углекислый газ мог выходить наружу».

Конечно, в гнезде оба эти условия выполняются, а в инкубаторе их нужно специально обеспечивать.

### Куриное яйцо: исходные данные

Вспользуемся книгой «Размеры животных: почему они так важны?» (автор К. Шмидт-Нильсен) и возьмем из нее необходимые нам сведения:

- масса типичного куриного яйца составляет 60 г;
- затраты энергии на развитие цыпленка составляют 30 ккал;
- высиживание происходит в течение 21 суток в тепле при подходящей влажности и периодическом переворачивании;
- за время высиживания масса яйца уменьшается до 51 г (уменьшение на 15%), в ходе чего оно поглощает 6 л кислорода и выделяет 4,5 л двуокиси углерода и 11 л водяного пара.

### Некоторые энергетические оценки

За время инкубации яйцо поглощает 6 литров кислорода, который поддерживает энергетику развития зародыша. Так как один моль любого газа при нормальных условиях занимает объем 22,4 литра, то 6 литров соответствуют 8,6 граммам кислорода. Окисление кислорода сопровождается выделением энергии – удельная энергоемкость этого процесса около 14 кДж/г, поэтому поглощение 8,6 г кислорода дает 120 кДж, или 30 ккал энергии. Последнее число совпадает с тем, которое приведено в указанной книге.

Если взять затраченную энергию (120 кДж) и поделить ее на время инкубации (21 день), то средняя мощность обменных реакций за время высиживания до появления цыпленка составит 0,07 Вт. Для птиц мощность обменных реакций  $P$ , т.е. интенсивность метаболизма, связана с их массой  $M_{\text{птицы}}$  следующим образом:

$$P \approx 5 \cdot M_{\text{птицы}}^{0,75},$$

где мощность измеряется в ваттах, а масса – в килограммах. Заметим, что зависимость мощности от массы для птиц та же, что и для млекопитающих, но коэффициент перед массой здесь больше (5 – для птиц, 3 – для млекопитающих), что связано с большей температурой тела у птиц. Для только что родившегося цыпленка эта формула дает интенсивность метаболизма около 0,6 Вт. Сопоставление средней мощности метаболизма

(0,07 Вт) и мощности в конце высиживания (0,6 Вт) приводит к выводу, что в яйце в течение инкубации в среднем обменные реакции протекают почти на порядок менее интенсивно, чем в конце.

Этот парадокс может быть разрешен тем, что по мере развития зародыша интенсивность метаболизма растет. Соответствующая ориентировочная кривая приведена на рисунке 1. Для такой зависимости средняя интенсивность метаболизма за время высиживания

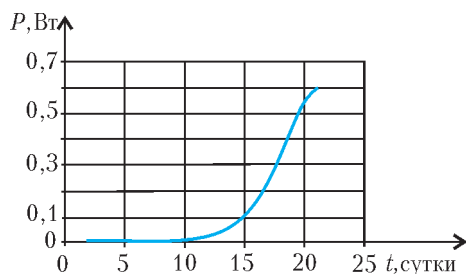


Рис.1. Зависимость интенсивности метаболизма эмбриона цыпленка от времени

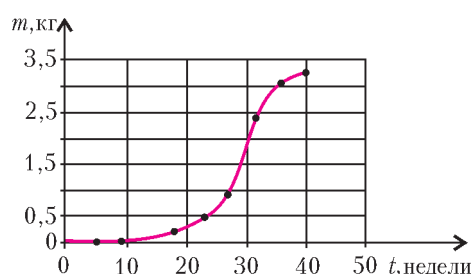


Рис.2. Зависимость массы человеческого эмбриона от времени

действительно существенно меньше максимальной. При построении кривой, изображенной на рисунке 1, были использованы интуитивные соображения о быстром (экспоненциальном) росте метаболизма в начале процесса и постепенном замедлении его к концу.

В качестве обоснования подобного типа кривых приведем вид зависимости интенсивности метаболизма от времени в случае вынашивания человеческого детеныша. Будем отталкиваться от данных по зависимости массы человеческого эмбриона от времени, изображенной на рисунке 2. Теперь перейдем от зависимости массы от времени к зависимости от времени для интенсивности метаболизма. Для этого воспользуемся уравнением, связывающим массу организма с интенсивностью метаболизма:

$$P(t) = N_c P_c + E_c \frac{dN_c}{dt}.$$

Здесь  $N_c$  – число клеток в организме,  $P_c$  – интенсивность метаболизма клетки,  $E_c$  – энергия, идущая на образование одной клетки. Масса организма просто выражается через массу одной клетки и их количество:  $m = m_c N_c$ . В результате появляется возможность по известной зависимости  $m(t)$  получить временную зависимость для интенсивности метаболизма  $P(t)$ , изображенную на рисунке 3. При построении этой кривой были использованы следующие известные значения величин:  $m_c = 3 \cdot 10^{-9}$  г,  $E_c \approx 2 \cdot 10^{-5}$  Дж,  $P_c \approx 1 \cdot 10^{-11}$  Вт.

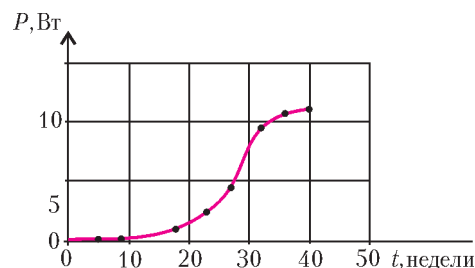


Рис.3. Зависимость интенсивности метаболизма человеческого эмбриона от времени

Как уже говорилось, яйцо за время инкубации выделяет 11 литров водяного пара. Поскольку 1 моль (т.е. 18 грамм) водяного пара при нормальных условиях занимает объем 22,4 литра, то 11 литров соответствуют 8,8 граммам. Так как масса яйца в ходе высиживания уменьшается с 60 до 51 г (на те же 9 г), то это уменьшение происходит главным образом из-за испарения воды. При удельной теплоте испарения воды около 2 кДж/г на испарение 9 г воды требуется энергия порядка 20 кДж. Эта величина существенно меньше общих затрат за время инкубации (120 кДж), и ею в первом приближении можно пренебречь.

### Поры в скорлупе яйца: диффузия водяного пара

Еще раз воспользуемся данными из указанной книги о размерах животных:

- толщина скорлупы 0,35 мм;
- скорлупа имеет площадь поверхности 70 см<sup>2</sup>, ее пронизывают примерно 10<sup>4</sup> пор, диаметр каждой поры 17 мкм.

При температуре 39 °С давление насыщенного водяного пара близко к 55 мм рт. ст. (т.е. 0,073 атм), а давление водяного пара в гнезде, согласно справочным данным, составляет 35 мм рт. ст. Это соответствует уровню влажности порядка 60 %.

Оценим время испарения водяного пара через поры в скорлупе. Для этого воспользуемся соотношениями из статьи «Листья улыбаются» (см. «Квант» №4 за 2006 г.) для задачи Стефана:

$$t_{\text{исп}} = \frac{V}{\Gamma_{\Sigma}}, \quad \Gamma_{\Sigma} = N \Gamma_1, \quad \Gamma_1 \approx 4aD \frac{n(1-f)}{n_b}.$$

Здесь  $\Gamma_{\Sigma}$  и  $\Gamma_1$  – скорости испарения, полная и сквозь одну пору. Подставив в эти соотношения объем яйца  $V = 60$  см<sup>3</sup>, радиус поры  $a = 0,85 \cdot 10^{-3}$  см, общее количество пор  $N = 1 \cdot 10^4$ , коэффициент диффузии  $D = 0,22$  см<sup>2</sup>/с, концентрацию молекул воды  $n_b = 3 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>, концентрацию молекул водяного пара (при температуре 39 °С)  $n = 2,7 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>, относительную влажность  $f = 0,6$ , получим время испарения  $t_{\text{исп}} \sim 2,6$  суток! Поскольку в действительности за 21 сутки испаряется только 15 % воды, то это означает, что водяной пар где-то существенно замедляет свое движение.

Оказывается, что поры в скорлупе, в отличие от устьиц на поверхности листа, представляют собой довольно длинные каналы, и именно в них происходит

существенное замедление выхода водяного пара. Поскольку толщина скорлупы куриного яйца 350 мкм, а диаметр поры 17 мкм, то отношение длины поры к ее диаметру составляет около 20. При распространении водяного пара по такой длинной поре потери давления  $\Delta p$  определяются законом Пуазейля:

$$\Delta p = \frac{32\eta lv}{d^2},$$

где  $\eta$  – вязкость,  $v$  – скорость движения пара,  $l$  и  $d$  – длина и диаметр поры, соответственно. Поэтому потери давления  $\Delta p$  прямо пропорциональны отношению  $l/S$ , где  $S = \pi d^2/4$  – площадь поры, а проницаемость поры, т.е. обратная потерям давления величина пропорциональна  $S/l$ .

Длина поры в зависимости от массы яйца меняется так (по 367 видам птиц):

$$l = 5,126 \cdot 10^{-2} \cdot M_{\text{яйца}}^{0,456},$$

где длина измеряется в миллиметрах, а масса – в граммах. Суммарная площадь пор составляет

$$S_{\Sigma} = 9,2 \cdot 10^{-3} \cdot M_{\text{яйца}}^{1,236},$$

где площадь измеряется в квадратных миллиметрах, а масса – в граммах. В итоге зависимость проницаемости скорлупы  $\delta$  от массы яйца  $M_{\text{яйца}}$  можно выразить отношением

$$\delta \sim \frac{S_{\Sigma}}{l} \sim \frac{M_{\text{яйца}}^{1,236}}{M_{\text{яйца}}^{0,456}} \sim M_{\text{яйца}}^{0,78}.$$

Тогда за все время инкубации испаренная масса водяного пара  $\Delta M_{\text{исп}}$  будет прямо пропорциональна массе яйца:

$$\Delta M_{\text{исп}} \sim \delta \cdot t_{\text{инк}} \sim M_{\text{яйца}}^{0,78} \cdot M_{\text{яйца}}^{0,22} \sim M_{\text{яйца}},$$

а отношение  $\Delta M_{\text{исп}}/M_{\text{яйца}}$  окажется одинаковым для всех видов птиц!

Итак, «усушка» приводит к появлению внутри скорлупы небольшого свободного пространства. Оно получается естественным образом в ходе испарения воды через скорлупу, но оказывается важным еще по одной причине. Имея такую свободу движения, цыпленок может размахнуться (это, конечно, громко сказано), стукнуть клювом по скорлупе и выйти в мир. Значит, скорлупа должна быть достаточно прочной, чтобы устоять под действием веса птицы и дополнительных нагрузок при периодическом переворачивании яиц, но треснуть при ударе клюва тщедушного цыпленка. Подобная задача обсуждалась в «Занимательной физике» Я.И.Перельмана, где было показано, что выпуклая форма яйца позволяет выдерживать довольно большие *внешние* нагрузки. Так, скорлупа яйца страуса разрушается при внешней нагрузке около 1200 Н. В то же время даже слабый удар птенца клювом *изнутри* способен пробить эту скорлупу.

#### А что со слоновой птицей?

Слово «эпиорнис» означает «величайшая из птиц». Эти нелетающие птицы (рис.4) ростом более трех метров обитали на Мадагаскаре вплоть до XVII века. Огромные яйца эпиорнисов (рис.5), вмещавшие до 9



Рис.4. Эпиорнис – величайшая из птиц

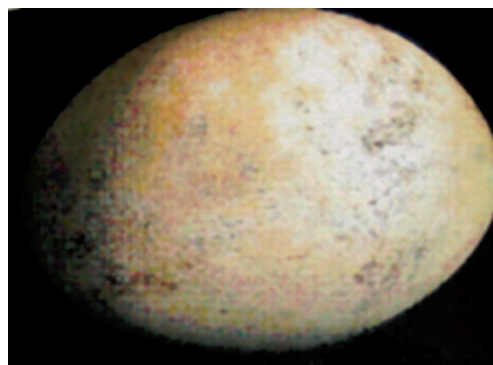


Рис.5. Яйцо эпиорниса

литров воды, жители Мадагаскара использовали в качестве сосудов. Гигантские кости эпиорнисов послужили основой сведений о мифической птице Рух, упоминаемой в сказках «Тысяча и одна ночь».

Длительность высидывания птенца эпиорниса, в соответствии с приведенной выше зависимостью ее от массы, составляет около 90 суток. Если вдуматься, это очень большая величина – целый климатический сезон слоновая птица фактически прикована к гнезду. За время высидывания масса яйца уменьшается с 10 до 8,5 кг. Средний диаметр яйца эпиорниса составляет примерно 25 см, толщина скорлупы 4–5 мм, а масса скорлупы порядка 1,5 кг. Пробить такую «броню» – занятие уже на пределе возможностей. Но это оказалось возможным – благодаря специальным желобкам, расположенным внутри при «входе» в пору.

# Ян Гевелий

*А. ВАСИЛЬЕВ*

**В**РЯДУ БЛИСТАТЕЛЬНЫХ ОСНОВОПОЛОЖНИКОВ европейской астрономической школы важное место принадлежит Яну Гевелию (28.01.1611–28.01.1687), потомственному пивовару и канцлеру славного ганзейского порта Гданьск (впоследствии Данциг, а затем снова Гданьск). Еще в гимназии Ян приобрел навыки картографии и конструирования астрономических инструментов, а кругозор расширил в беседах с Пьером Гассенди, Мареном Мерсенном и Атанасием Кирхером, которых он посетил во время своего первого европейского турне. Из путешествия Ян вернулся в 1634 году с тем, чтобы унаследовать пивоварню от своего отца Авраама Гевелия и жениться на владелице двух соседних домов Катарине Ребешке. Это обстоятельство – наличие трех стоящих стена к стене домов, а тем самым, и общей крыши – сыграло решающую роль в дальнейшей судьбе молодого польского астронома.

Как известно, первые телескопы Галилея, сконструированные им еще в начале XVII века, имели в длину немногим более метра. Эти телескопы страдали хроматической аберрацией, преодолеть которую в то время можно было лишь за счет увеличения размеров подзорной трубы. Хроматическая аберрация обусловлена дисперсией света, проходящего через линзу, т.е. зависимостью показателя преломления вещества линзы от длины волны света. В результате белый свет разлагается на составляющие его цветные лучи. Коэффициент преломления синих лучей больше, чем красных, поэтому их фокус расположен ближе к задней главной точке линзы, чем фокус красных лучей. Отсюда следует, что для луча белого света единого фокусного расстояния не существует, а есть совокупность фокусных расстояний лучей всех цветов. Поэтому на экране, расположенном в области формирования изображения, вместо одной светлой точки наблюдается совокупность цветных кружков.

Свою первую обсерваторию Гевелий создал в 1641 году, использовав пространство на крыше. Через несколько лет он построил телескоп длиной около 4 метров, который увеличивал удаленные предметы более чем в 50 раз. При конструировании астрономических инструментов Гевелий опирался на глубокое понимание принципов лучепреломления в линзах. Чем более плоскими являются линзы, тем большим фокусным расстоянием они обладают. Длиннофокусные линзы дают более четкие изображения, чем короткофокусные, однако объектив и окуляр в таких телескопах нужно располагать на больших расстояниях друг от друга. Развиваясь в этом направлении, Гевелий построил вначале 20-метровую подзорную трубу, а затем и главное свое достижение – 50-метровый телескоп. Этот прибор подвешивался на высоком столбе при помощи системы канатов и блоков. Управление телескопом осуще-

ствляла команда из отставных матросов, знакомых с обслуживанием такелажа. Конструкция Гевелия – так называемый воздушный телескоп – представляла собой инструмент без трубы и без жесткой связи объектива и окуляра. Гигантский телескоп подрагивал при малейшем дуновении ветра с Балтики, деревянные опоры и пеньковые канаты прогибались и натягивались с изменением температуры и влажности. В этих условиях настройка объектива и окуляра на единую оптическую ось представляла почти непреодолимые трудности.

Тем не менее, и это признак настоящего ученого, Гевелий в совершенстве овладел своими инструментами и провел целую серию блестящих астрономических наблюдений. Кроме того, Гевелий был непревзойденным наблюдателем, невооруженным глазом наблюдая звезды седьмой величины. С помощью секстанта, сделанного им самим, Гевелий составил каталог положений 1564 звезд с точностью до угловой минуты. Эти наблюдения он провел без использования оптики, полагая, что линзы могут внести погрешности в измерения.

Первым научным трудом Гевелия была «Селенография, или описание Луны», изданная в 1647 году в Гданьске. В ней содержалось детальное описание видимой поверхности Луны. Работа, отпечатанная в собственной типографии автора, содержала 133 гравюры, изображавшие 60 участков лунной поверхности и общий вид Луны в различных фазах. Гевелий предложил названия для различных объектов на поверхности Луны, некоторые из которых сохранились до нашего времени, правильно оценил высоту лунных гор, открыл явление оптической либрации (наблюдаемые периодические маятникообразные колебания Луны относительно ее центра масс, в результате чего прямым наблюдениям доступно 0,59 всей лунной поверхности).

В дальнейшем Гевелий проводил самые разнообразные наблюдения, и ему принадлежат астрономические открытия в разных областях. Он продолжил заниматься вопросами лунного движения и оценил расстояние от Земли до Луны, период обращения Луны, период собственного вращения Солнца. Занимался наблюдениями двойных и переменных звезд, определил периоды обращения галилеевских спутников Юпитера. Гевелий открыл 4 кометы и опубликовал в 1668 году труд «Кометография», где изложил историю наблюдений всех известных в то время комет и показал, что некоторые кометы движутся по параболическим орбитам. Именно Гевелий познакомил европейцев с главным трудом Улугбека – так называемыми «Новыми астрономическими таблицами».

Гевелий был одним из наиболее уважаемых астрономов своего времени. В 1664 году его избрали членом Лондонского Королевского общества, а в 1666 году ему был

предложен пост директора вновь построенной Парижской обсерватории. Это предложение, однако, Гевелий отклонил, что привело к назначению на этот пост Джованни Доменико Кассини. Финансовую поддержку Гевелию оказывали монархи Польши (Ян III Собеский) и Франции (Людовик XIV).

В начале 1670-х годов Гевелий оказался вовлечен в жаркий диспут со знаменитыми английскими астрономами Джоном Фламстедом и Робертом Гуком, которые отстаивали необходимость использования телескопов и микрометрического оборудования для точного определения положения звезд. Эта дискуссия достигла апогея, когда Лондонское Королевское общество отправило молодого Эдмонда Галлея в Гданьск для проверки данных

Гевелия с помощью новейшего микрометрического телескопа. Галлей подтвердил все результаты польского астронома.

В 1679 году обсерватория Гевелия с уникальными астрономическими инструментами, в частности секстантом, любимым инструментом астронома, с рукописями и библиотекой сгорела. Тем не менее, Гевелий возобновил наблюдения. В 1690 году, уже после смерти мужа, его вторая жена Элизабет Гевелиус издала ставший впоследствии знаменитым звездный атлас «Уранография», основанный на каталоге Гевелия и содержавший великолепные изображения многих, в том числе и предложенных им, созвездий.

## НАМ ПИШУТ

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера (1707–1783). Наши читатели посвятили этой дате исследования некоторых элементарных задач, которые в свое время привлекли внимание выдающегося математика.

### ОКУНАЯСЬ В ГЛУБИНЫ АРИФМЕТИКИ

В 1749 году Леонард Эйлер написал своему коллеге Санкт-петербургскому академику Христиану Гольдбаху письмо, в котором признался, что попытка найти решение в целых числах по виду простой системы уравнений

$$x + y + z = u^2, \quad xy + yz + zx = v^2, \quad xyz = w^2 \quad (*)$$

привела его в отчаяние – так много труда потребовало от него это решение. Поэтому он не удивился тому, что наименьшее целочисленное решение есть

$$x = 1633780814400, \quad y = 252782198228, \quad z = 3474741058973.$$

О трудностях решения системы (\*) и о том, что найденные Эйлером числа являются наименьшими натуральными числами, удовлетворяющими системе (\*), сообщает также известный специалист в области элементарной теории чисел В.Серпинский.

Оказывается, и великий Эйлер, и его не критично настроенные комментаторы в данном случае ошибаются. Несложно проверить, что тройка натуральных чисел

$$x = 45, \quad y = 64, \quad z = 180$$

и, соответственно, числа

$$u = 17, \quad v = 150, \quad w = 720$$

также удовлетворяют системе (\*), причем эти числа не являются столь уж огромными.

Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в справедливости следующих утверждений.

1. Рассмотрим тройку натуральных чисел  $a, b, c$ , и пусть  $A = a^2 + b^2$ ,  $B = a^2 + b^2 + c^2$ . Если число  $Aa^2c^2 + B^2b^2$  является точным квадратом, то каждая из троек чисел

$$a) \quad x = A^2Ba^2, \quad y = ABa^2c^2, \quad z = AB^2b^2;$$

$$б) \quad x = ABa^2b^2, \quad y = Aa^4c^2, \quad z = Ba^2b^2c^2$$

удовлетворяет системе уравнений (\*) для некоторых натуральных  $u, v, w$ .

2. Если натуральные числа  $x, y, z$  таковы, что их сумма, сумма попарных произведений и произведение являются

точными квадратами, то таким же свойством обладает тройка чисел  $xy, yz, zx$ . Это свойство позволяет конструировать новые решения системы (\*) по другим найденным решениям.

Ю.Аленков, В.Кибирев

### ПО СЛЕДАМ НЕОПУБЛИКОВАННОЙ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА

В одной из записных книжек Леонарда Эйлера обнаружена такая задача:

*Найти треугольник, в котором прямые, делящие углы пополам, выражаются рационально.*

Сам классик науки приводит пример треугольника, обладающего требуемым свойством, а именно треугольник со сторонами  $a = 25$ ,  $b = 25$ ,  $c = 14$ . Об этом же треугольнике сообщает ученик Эйлера Н.Фусс, указывая еще два подходящих примера:

$$a = 975, \quad b = 975, \quad c = 546 \quad \text{и} \quad a = 1369, \quad b = 1183, \quad c = 1914.$$

Для проверки можно воспользоваться формулой

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b},$$

по которой вычисляется длина биссектрисы  $l_c$  угла, противолежащего стороне  $c$  (длины биссектрис двух других углов вычисляются аналогично).

Покажем, как «собирать» треугольники, в которых не только биссектрисы рациональны, но и другие размеры выражаются целыми числами. Для удобства треугольник с рациональными биссектрисами будем называть *эйлеровым*.

Строительным материалом у нас будут прямоугольные треугольники, длины сторон  $x, y, z$  которых выражаются формулами

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2, \quad (1)$$

где  $m, n$  – некоторые натуральные числа. В случае взаимной простоты  $m$  и  $n$  такие прямоугольные треугольники называются основными пифагоровыми треугольниками, но требование взаимной простоты для нас несущественно. В качестве важного дополнительного условия

(Продолжение см. на с. 56)



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2051» или «Ф2058». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2054(а) предлагалась на LXX Московской математической олимпиаде, задача М2055 – на X Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

## Задачи М2051–М2055, Ф2058–Ф2062

**М2051.** Пусть  $a, b, c > 0$ ;  $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = abc$ . Докажите, что  $a = b = c$ .

*В.Произволов*

**М2052.** а) Рассмотрим окружность и ее хорду  $AB$ . Найдите множество точек  $M$ , находящихся от прямой  $AB$  на расстоянии, равном длине касательной, проведенной из точки  $M$  к рассматриваемой окружности.

Докажите следующие утверждения.

б) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в четырех точках, диагонали «параболического четырехугольника» перпен-

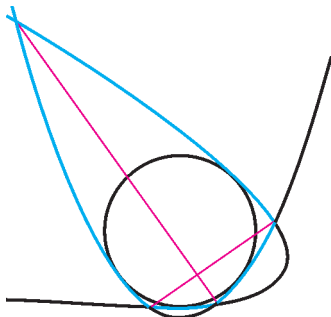


Рис. 1

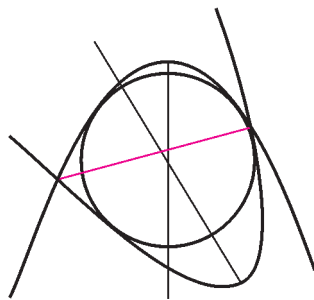


Рис. 2

дикулярны (рис.1).

в) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в двух точках, оси парабол наклонены под одним и тем же углом к прямой, проходящей через точки пересечения этих парабол (рис.2).

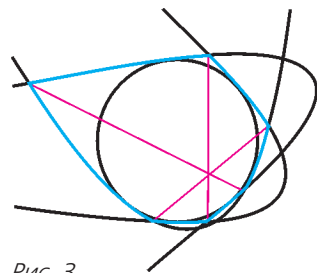


Рис. 3

г) Для любых трех парабол, описанных около одной окружности и таких, что любые две из них пересекаются в четырех точках, главные диагонали «параболического шестиугольника» пересекаются в одной точке (рис.3).

*Ф.Нилов (ученик 10 класса)*

**М2053.** Пусть  $n > 3$ . Докажите, что существуют целые отличные от нуля числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  такие, что

$$x_1 x_2 \dots x_n = (x_2 + x_3 + \dots + x_n)(x_1 + x_3 + \dots + x_n) \times \dots \times (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}).$$

*С.Токарев, В.Сендеров*

**М2054.** Пусть  $P(x) = x^2 + x + 1$ . Существуют ли натуральные числа  $x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_n$  такие, что

$$P(x_1) = x_2^{k_2}, P(x_2) = x_3^{k_3}, \dots, P(x_n) = x_1^{k_1}?$$

Решите задачу для случаев:

- $n = 2$ ;
- $n$  – произвольное нечетное число;
- $n = 4$ .

*В.Сендеров, Б.Френкин*

**М2055.** Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами  $0, 1, 2, \dots$ . В некоторых клетках лежат камни. Если на  $i$ -й клетке ( $i > 0$ ) лежит ровно  $i$  камней, то разрешается снять с нее и разложить по одному на клетки с номерами  $i - 1, i - 2, \dots, 0$ . Леша распределил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Найдите минимальный номер клетки, на которой лежит камень.

*Ф.Бахарев, И.Богданов*

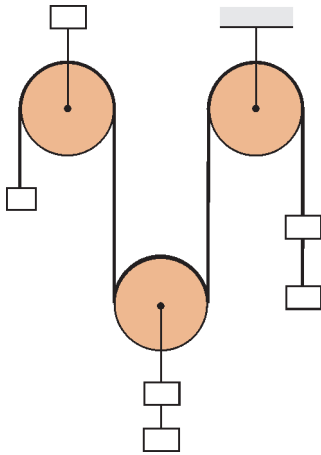


Рис. 4

**Ф2058.** В системе на рисунке 4 все грузы одинаковы. Вначале грузы удерживают, затем отпускают, и система приходит в движение без рывков. Найдите ускорения подвижных блоков.

А.Блоков

**Ф2059.** Новые настенные часы с маятником идут очень точно. Маятник представляет собой очень легкий длинный стержень, подвешенный за один из концов, к другому концу

свободно вращаться вокруг своей оси. Со временем, из-за трения в оси диска, он перестал поворачиваться вокруг этой оси. Будут ли часы спешить или они теперь начнут отставать? Оцените неточность хода часов за сутки.

З.Рафаилов



Рис. 5

**Ф2060.** Моль гелия медленно расширяется от объема 10 л до объема 10,1 л, при этом давление газа плавно уменьшается от 1 атм до 0,985 атм. Найдите теплоемкость гелия в этом процессе.

А.Простов

**Ф2061.** Тонкостенную непроводящую сферу радиусом  $R$  зарядили равномерно по поверхности полным зарядом  $Q$ , а затем разрезали пополам – по «экватору». Одну половину сферы убрали, а вторую оставили – для изучения. Найдите потенциал электрического поля, создаваемого зарядами полусферы в точке «экваториальной» плоскости, находящейся на расстоянии  $R/2$  от центра сферы.

Б.Сложнов

**Ф2062.** На тороидальный ферромагнитный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью, намотана катушка, содержащая большое количество витков. Катушку подключили к сети 220 В, ток через катушку при этом составил 10 мА (действующее значение). Вольтметр, имеющий сопротивление 10 кОм, подключают между одним из концов катушки и отводом, сделанным от середины катушки (половина витков). Какое напряжение покажет вольтметр? Какой ток теперь течет через источник?

А.Зильберман

### Решения задач М2026 – М2035, Ф2043–Ф2047

**М2026.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  выбраны соответственно точки  $P$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  так, что  $\angle MAN = 45^\circ$ ,  $PM \parallel AN$ ,  $AM \parallel NQ$ . Отрезок  $PQ$  пересекает  $AM$  и  $AN$  в точках  $F$  и  $G$

соответственно. Докажите, что площадь треугольника  $AFG$  равна сумме площадей треугольников  $FMP$  и  $GNQ$ .

Прежде всего отметим, что  $\angle PMA = \angle MAN = \angle ANQ$ , и значит, треугольники  $AFG$ ,  $MFP$  и  $NQG$  подобны (см. рисунок). Поэтому утверждение задачи равносильно равенству  $GF^2 = PF^2 + GQ^2$ .

Далее, треугольники  $NQD$  и  $MPB$  подобны треугольникам  $AMB$  и  $AND$  соответственно, следовательно,

$$\frac{QD}{ND} = \frac{BM}{AB}, \quad \frac{ND}{AD} = \frac{BP}{BM}.$$

Перемножив эти равенства, получим, что  $BP = DQ$ , или  $AP = AQ$ . Пусть  $X$  – точка, симметричная  $P$  относительно  $AM$ . Тогда  $AX = AP = AQ$  и  $\angle XAN = 45^\circ - \angle MAP = \angle NAD$ , т.е.  $X$  также симметрична  $Q$  относительно  $AN$ . Таким образом,  $XF = FP$ ,  $XG = GQ$  и

$$\angle XFG + \angle XGF = 360^\circ - 2\angle PFM - 2\angle QGN = 90^\circ.$$

Применив к прямоугольному треугольнику  $XFG$  теорему Пифагора, получим искомое равенство.

В.Произволов

**М2027.** На доске написаны три натуральных числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Петя записывает на листке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет равным нулю. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на листке?

**Ответ:**  $xyz$ .

**Первое решение.** Заметим, что произведение трех чисел, записанных на доске, с каждой операцией уменьшается ровно на то число, которое Петя записывает на бумажку. Когда одно из чисел становится нулем, произведение всех чисел на доске тоже равно нулю, откуда сумма всех чисел, выписанных Петей, равна начальному произведению трех чисел на доске, т.е.  $xyz$ .

**Второе решение.** Рассмотрим параллелепипед со сторонами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1, записывая его объем на бумажку, и продолжаем действовать так с оставшимся параллелепипедом. Процесс закончится, когдаотрежем все. Значит, на бумажке будет записан объем исходного параллелепипеда, т.е.  $xyz$ .

Е.Горский, С.Дориченко

**М2028.** Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»).

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?

б) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

а) Спросим каждого: «Верно ли, что оба твоих соседа – вруны?». Среди трех ответов есть «да» вруна и «нет» правдивого, поэтому один из ответов будет дан ровно один раз. По нему мы узнаем ответившего: это либо врун, либо правдивый. Задав ему вопрос про одного из двух других: «Верно ли, что он хитрец?», мы все узнаем.

**Замечания.** 1. В начале можно задавать любой вопрос, ответ на который вам известен (например, «Верно ли, что сегодня четверг?»).

2. Можно обойтись и тремя вопросами, если они будут достаточно изощренными, что-то вроде: «Ответит ли он «да», если я спрошу...»

б) Обозначим участников: врун В, правдивый П и хитрецы ХВ и ХП. Пусть хитрецы договорятся отвечать так, как будто ХВ – врун, ХП – правдивый, В – хитрец, притворяющийся вруном, а П – хитрец, притворяющийся правдивым. Поставив их лицом друг против друга так, что ХП как бы служит отражением П, а ХВ служит отражением В, видим, что невозможно отличить, кто стоит «перед зеркалом», а кто «за зеркалом», – ответы полностью «зеркальны».

Б.Гинзбург, М.Гервер

**M2029.** Даны две бесконечные прогрессии, состоящие из положительных чисел: арифметическая и геометрическая, причем любое число, встречающееся в геометрической прогрессии, встречается также и в арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии – целое число.

Пусть  $q$  – знаменатель геометрической прогрессии (т.е.  $b_{n+1} = q^n b_1$  при всех натуральных  $n$ ). Если  $q = 1$ , то задача решена. Иначе  $(b_{n+2} - b_{n+1}) / (b_2 - b_1) = q^n$ , откуда  $q$  – рациональное (ясно, если взять  $n = 1$ ) и, кроме того,  $(b_2 - b_1)q^n$  – целое число при любом натуральном  $n$ . Записывая  $q$  в виде несократимой дроби  $q = s/t$ , получаем, что  $(b_2 - b_1)s^n / t^n$  – целое число, и, значит,  $b_2 - b_1$  делится на  $t^n$  при любом  $n$ . Это возможно только если  $t = 1$  или  $t = -1$ , т.е. когда  $q$  – целое.

Б.Френкин

**M2030.** Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?

**Ответ:** да, можно.

Пусть  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – куб с длиной ребра 1. Отметим на ребрах  $AB, AD, AA_1, C_1C, C_1B_1, C_1D_1$  точки  $M_1, M_2, \dots, M_6$  соответственно так, чтобы

$$AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = 3/4.$$

Тогда длины отрезков  $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_4$  равны  $\sqrt{(3/4)^2 + (3/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$ , а дли-

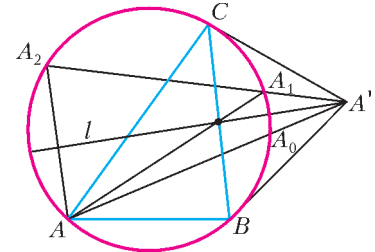
ны отрезков  $M_1M_4, M_1M_5, M_2M_4, M_2M_6, M_3M_5, M_3M_6$  равны  $\sqrt{(1/4)^2 + 1^2 + (1/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$ . Так как длины всех двенадцати отрезков равны, то все треугольники  $M_1M_2M_3, M_4M_5M_6, M_1M_4M_5, M_2M_4M_6, M_3M_5M_6, M_4M_1M_2, M_5M_1M_3, M_6M_2M_3$  равносторонние и точки  $M_1, M_2, \dots, M_6$  являются вершинами октаэдра.

Л.Радзивиловский

**M2031.** Прямые, содержащие медианы треугольника  $ABC$ , вторично пересекают его описанную окружность  $\omega$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Прямые, проходящие через  $A, B, C$  и параллельные противоположным сторонам, пересекают  $\omega$  второй раз в точках  $A_2, B_2, C_2$ . Докажите, что прямые  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  пересекаются в одной точке.

Приведем решение, найденное на олимпиаде М.Илюхиной. Оно основывается на следующих фактах.

1. Пусть  $A'$  – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точках  $B$  и  $C$  (см. рисунок). Тогда прямая  $AA'$  является симедианой треугольника (т.е. прямой, симметричной медиане  $AA_1$  относительно биссектрисы угла  $A$ ).



2. Для любого треугольника  $ABC$  и любой точки  $P$  прямые, симметричные прямой  $AP, BP, CP$  относительно соответствующих биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке (или параллельны), которая называется изогонально сопряженной точке  $P$ .

Построим точку  $A'$ , как указано в пункте 1 ( $B', C'$  определяются аналогично). Пусть прямая  $AA'$  вторично пересекает описанную окружность  $\omega$  в точке  $A_0$ . Тогда  $\angle A_1AB = \angle A_0AC$ , откуда дуги  $BA_1$  и  $CA_0$  равны. Так как треугольник  $A'BC$  равнобедренный, а  $\omega$  – его вневписанная окружность, то они симметричны относительно биссектрисы  $l$  угла  $BA'C$ . Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки  $A_1$  и  $A_0$  переходят друг в друга. Заметим, что  $l$  – серединный перпендикуляр к  $BC$ , поэтому  $A$  при этой симметрии переходит в  $A_2$ , а следовательно, прямая  $A_1A_2$  переходит в прямую  $AA'$ . Поэтому, так как прямые  $AA', BB', CC'$  пересекаются в одной точке  $L$  как симедианы треугольника  $ABC$ , то прямые  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  также пересекаются в точке, изогонально сопряженной  $L$  относительно треугольника  $A'B'C'$ .

Случай, когда одной из точек  $A', B', C'$  не существует, аналогичен.

А.Заславский

**M2032.** а) Существует ли такое натуральное  $n$ , что для любого натурального  $k$  хотя бы одно из чисел  $n^k - 1, n^k + 1$  имеет вид  $a^b$  для некоторых натуральных  $a$  и  $b > 1$ ?

б\*) Назовем натуральное число антипростым, если оно делится на квадрат любого своего простого

делителя. Два натуральных числа назовем близнецами, если они отличаются на 2. Конечно или бесконечно множество пар антипростых чисел-близнецов?

Латинскими и греческими буквами в решении обозначены натуральные числа.

а) **Ответ:** нет.

Предположим, что такое число  $n$  существует. Ясно, что  $n > 1$ . Имеем  $n^4 + 1 \neq 2^l$ ,  $n^4 - 1 \neq 2^l$  (поскольку  $a^2 + 1$  не делится на 4). Поэтому существуют нечетные простые числа  $p$  и  $q$  такие, что  $n^4 + 1$  делится на  $p$ ,  $n^4 - 1$  делится на  $q$ ; ясно, что  $p \neq q$ . Из леммы Гензеля следует, что при некотором  $\alpha_0$  и при любом  $\beta$  число  $p$  входит в каноническое разложение числа  $n^{4p^{\alpha_0}q^\beta} + 1$  в некоторой степени вида  $2^l$ . Аналогично, при некотором  $\beta_0$  и при любом  $\alpha$  число  $q$  входит в каноническое разложение числа  $n^{4q^{\beta_0}p^\alpha} - 1$  в некоторой степени этого же вида. Поскольку справедливо хотя бы одно из равенств

$$n^{4p^{\alpha_0}q^{\beta_0}} + 1 = a^b, \text{ где } b > 1,$$

$$n^{4q^{\beta_0}p^{\alpha_0}} - 1 = c^d, \text{ где } d > 1,$$

мы получаем: либо  $b = 2^k$ , либо  $d = 2^k$ . В любом из этих случаев приходим к невозможному равенству:  $r^2 - s^2 = 1$ .

б) **Ответ:** бесконечно.

*Первое решение.* Заметим, что (25, 27) – пара антипростых чисел-близнецов. С другой стороны, из тождества

$$(2n^3 + 3n)^2 + 2 = (2n^2 + 1)^2 (n^2 + 2) \quad (1)$$

следует, что вместе с любой парой  $(n^2, n^2 + 2)$  антипростых близнецов такой парой является также и

$$\left( (2n^3 + 3n)^2, (2n^3 + 3n)^2 + 2 \right).$$

К тождеству (1) можно придти, например, так. Будем искать многочлены с натуральными коэффициентами  $P(x)$  и  $Q(x)$ , отличные от 1 и такие, что

$$x(P(x))^2 + 2 = (Q(x))^2 (x + 2).$$

Легко видеть, что в случае констант это тождество выполняется лишь при  $P(x) = Q(x) = 1$ ; линейные же функции  $P(x) = ax + b$  и  $Q(x) = cx + d$ , где  $a, b, c, d \in \mathbf{N}$ , легко находятся методом неопределенных коэффициентов.

*Второе решение.* Будем рассматривать функции (формы)

$$f_D(x, y) = x^2 - Dy^2, \text{ где } x, y, D \in \mathbf{N}.$$

Достаточно доказать, что форма  $f_{27}(x, y)$  принимает значение  $-2$  в бесконечном числе точек  $(x, y)$ .

**Лемма 1.** Пусть число 1 является одним из значений формы  $f_D(x, y)$ . Тогда любое свое значение эта форма принимает в бесконечном числе точек  $(x, y)$ .

**Доказательство.** Пусть  $a^2 - Db^2 = 1$ , где  $a, b, D \in \mathbf{N}$ . Достаточно найти  $c, d, e, f \in \mathbf{N}$  такие, что

$$(cx + dy)^2 - D(ex + fy)^2 = x^2 - Dy^2$$

при всех  $x, y \in \mathbf{N}$ .

Для выполнения этого равенства достаточно (легко показать, что и необходимо), чтобы одновременно выполнялись равенства

$$\begin{aligned} c^2 - De^2 &= 1, \\ d^2 - Df^2 &= -D, \\ cd &= Def. \end{aligned}$$

Первое равенство справедливо, если  $c = a$ ,  $e = b$ . Для выполнения второго, или  $f^2 - D\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 1$ , достаточно  $f = a$ ,  $d = Db$ . Ясно, что числа  $c = a$ ,  $d = Db$ ,  $e = b$ ,  $f = a$  удовлетворяют и третьему равенству. Таким образом, получаем

$$(ax + Dby)^2 - D(bx + ay)^2 = x^2 - Dy^2. \quad (2)$$

Лемма доказана.

Поскольку  $f_{27}(5, 1) = -2$ , достаточно доказать существование  $a, b \in \mathbf{N}$  таких, что  $f_{27}(a, b) = 1$ . Докажем, что для любой формы  $f_{n^2+2}(x, y)$  такие числа  $a$  и  $b$  существуют. Для этого перепишем равенство  $f_{n^2+2}(a, b) = 1$  в виде

$$(n^2 + 2)b^2 = (a + 1)(a - 1) = (t + 2)t,$$

где  $t = a - 1$ , и возьмем  $b = n$ ,  $t = n^2$ .

*Третье решение.* Пусть  $n^2 + 2$  – антипростое число. Рассмотрим уравнение  $f_{n^2+2}(x, y) = -2$ , или  $x^2 + 2 = (n^2 + 2)y^2$ . Поскольку оно имеет решение  $x_0 = n$ ,  $y_0 = 1$ , то, вследствие леммы 1, оно имеет и некоторое решение  $(x_1, y_1)$ , где  $x_1 = m > x_0$ ,  $y_1 > y_0$ . Получили новое, большее чем  $n^2 + 2$ , антипростое число  $m^2 + 2$ ; рассмотрим уравнение  $f_{m^2+2}(x, y) = -2$ , и т.д. Заметим, что при любом натуральном  $n$  применение формулы (2) приводит к тождеству

$$(2n^3 + 3n)^2 - (n^2 + 2)(2n^2 + 1)^2 = -2.$$

Таким образом, мы вновь пришли к тождеству (1).

*Приложение*

**Лемма Гензеля.** Если  $x - 1$  делится на  $p^k$  ( $p > 2$  – простое,  $k > 0$ ), но не делится на  $p^{k+1}$ , то  $x^n - 1$  делится на  $p^{k+r}$  тогда и только тогда, когда  $n$  делится на  $p^r$ . Это важное утверждение часто используется в теории чисел.

Лемму Гензеля легко доказать с помощью следующего утверждения.

**Предложение.**  $P(x) = x^{p-1} + \dots + 1$ , где  $p \in \mathbf{P} \setminus \{2\}$ ,  $x \in \mathbf{Z}$ , не делится на  $p^2$ .

**Доказательство.** Пусть  $P(x) : p$ . Тогда и  $x - 1 : p$ . В самом деле,  $x^p - 1 : p$ , откуда вследствие Малой теоремы Ферма  $x - 1 : p$ .

Пусть  $P(x) : p$ ,  $x \neq 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(x) - p &= (x^{p-1} - 1) + \dots + (x - 1) = \\ &= (x - 1) \left( \frac{x^{p-1} - 1}{x - 1} + \dots + \frac{x - 1}{x - 1} \right) = (x - 1)A. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{x^l - 1}{x - 1} \equiv l \pmod{p}$  при  $x - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $l \in \mathbf{N}$ , то

$$A \equiv (p-1) + \dots + 1 = p \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Получили  $P(x) - p \cdot p^2$ , откуда  $P(x)$  не делится на  $p^2$ . При нечетном  $n$  легко распространить лемму Гензеля на случай чисел  $x + 1$  и  $x^n + 1$ . Сделайте это самостоятельно.

**Замечания**

1. Рассмотрим более общее, нежели выше, уравнение  $f_m(x, y) = 1$ , где  $x, y, m \in \mathbf{N}$ ,  $m$  – фиксированное число. Ясно, что в случае  $m = n^2$ , где  $n \in \mathbf{N}$ , это уравнение не имеет решений. При любом же  $m \neq n^2$  решения этого уравнения существуют. Это – основная теорема теории уравнений Пелля (подробный рассказ о них см. в статьях «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3, 4, 6 за 2002 г.).

Далее, **все** эти решения получаются из базового, «наименьшего», методом леммы 1.

Легко видеть, что общее уравнение  $f_m(x, y) = A$  ( $A \in \mathbf{Z}$ ,  $A$  и  $m$  – фиксированные числа) может – в частности, в случае  $m \neq n^2$  – не иметь решений  $(x, y)$  (где  $x, y \in \mathbf{N}$ ). Если же решения существуют, то все они в случае  $m \neq n^2$  получаются из некоторого конечного набора базовых методом леммы 1.

2. На Турнире городов в 1984 году предлагалась следующая (вошедшая также в «Задачник «Кванта» под номером 869) задача.

Пары последовательных натуральных чисел (8, 9), (288, 289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой свой простой множитель не менее чем во второй степени.

а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

Заметим, что из результата пункта б) задачи M2032 бесконечность множества таких пар получается автоматически: если  $n - 1$  и  $n + 1$  – антипростые числа, то  $n^2$  и  $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$  – также, очевидно, антипростые.

3. Оба пункта нашей задачи связаны с так называемой **проблемой Каталана** (см. статью в этом номере журнала).

*В. Сендеров*

**M2033.** У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?» Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

**Ответ:** за 34 вопроса.

Первый вопрос зритель задает про две крайние карты. Ответ 50 покажет всем, что они в самом деле крайние. Назовем любую из них 1-й (сверху или снизу – нам не важно), тогда другая – 52-я. Теперь уже надо дать

возможность все остальные номера карт определить однозначно. Назовем 2-ю карту дыркой, и вторым вопросом спросим про две карты рядом с дыркой (т.е. 1-ю и 3-ю). Ответ 1 задает положение 3-й карты однозначно. Далее будем продолжать задавать вопросы парами: в нечетных вопросах называем две самые крайние карты из еще не упомянутых (одна из них была дыркой, другая – недыркой), назначаем новой дыркой ранее неупомянутую карту рядом с недыркой и следующим четным вопросом спрашиваем про две карты рядом с дыркой. Так, в первой паре вопросов «знающий» называет 1-ю, 52-ю и 3-ю карты, во второй – 2-ю, 51-ю и 49-ю карты, в третьей паре – 4-ю, 50-ю и 6-ю карты и т.д. Как видим, дырки по очереди возникают то ближе к началу, то ближе к концу. В отличие от первой тройки для каждой следующей тройки карт после ответов на очередную пару вопросов теоретически есть два возможных расположения: основное (то, что на самом деле) и побочное (крайние карты меняются местами, средняя передвигается соответственно). Так, из ответов на 3-й и 4-й вопросы следует, что вторая тройка карт – это 2, 51 и 49 либо, 2, 51 и 4. Эта неопределенность исчезнет, однако, после ответа на следующий (в примере – на 5-й) вопрос. Суть в том, что максимальное число карт между ранее не упомянутыми крайними картами в побочном варианте меньше, чем в основном (ниже карты одной тройки обозначены одной буквой, неопределенная – тройка C):

Основной    abaC\_C.....bCbа  
Побочный    abaC.....CbCbа

Так задаем 33 вопроса. Последний 34-й вопрос зададим про крайнюю и карту рядом с ней (25-ю и 26-ю) (предпоследняя и последняя тройки обозначены буквами p и q соответственно):

abacdcefeghijklkmnopqQq\_pQpnonlmjkihihfgdedbcba

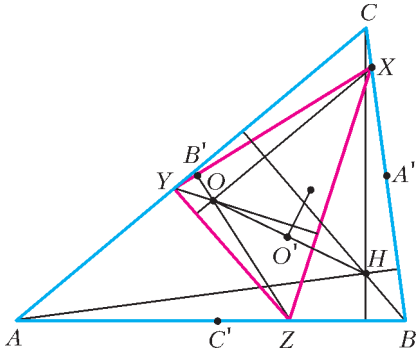
Тогда положение последней тройки и единственной оставшейся карты определится однозначно.

Покажем, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. Разобьем изначально все карты на 52 группы по одной карте. При вопросе про две карты из разных групп объединяем эти группы в одну. Каждый вопрос уменьшает число групп максимум на одну. Если задано не более 33 вопросов, то останется не менее  $52 - 33 = 19$  групп. Среди них групп из 3 карт – не более 17. Значит, либо найдутся две группы по одной карте, либо группа из ровно двух карт. В обоих случаях можно эту пару карт поменять местами, не трогая остальных: все ответы не изменятся. Тем самым, порядок не восстанавливается однозначно.

*А. Шаповалов*

**M2034.** На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки X, Y, Z так, что треугольники ABC и XYZ подобны. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ равноудален от ортоцентров треугольников ABC и XYZ<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> В условии, опубликованном в «Кванте» №1, имеются неточности.



Прежде всего отметим, что для любой точки  $X$  на стороне  $BC$  точки  $Y, Z$  определяются однозначно. Действительно,  $Z$  является пересечением  $AB$  и прямой, полученной из  $AC$  композицией поворота вокруг  $X$  на угол (ориентированный)  $BAC$  и гомететии с центром  $X$  и коэффициентом  $AC/AB$  (см. рисунок). Пусть теперь  $O$  – центр описанной около  $ABC$  окружности,  $A', B', C'$  – середины  $BC, CA, AB$ . Тогда треугольник  $A'B'C'$  подобен  $ABC$ , а  $O$  является его ортоцентром. Возьмем теперь на  $BC, CA, AB$  точки  $X, Y, Z$ , такие что углы  $XOA', YO'B', ZOC'$  равны. Из подобия треугольников  $XOA', YO'B', ZOC'$  следует, что треугольник  $XYZ$  получается из треугольника  $A'B'C'$  композицией поворота вокруг  $O$  на угол  $XOA'$  и гомететии с центром  $O$  и коэффициентом  $OX/OA'$ . Поэтому треугольник  $XYZ$  подобен  $ABC$ , а  $O$  – его ортоцентр. При описанной выше поворотной гомететии центр  $O'$  описанной окружности  $A'B'C'$  перейдет в центр описанной окружности  $XYZ$ , значит, центр описанной окружности  $XYZ$  лежит на прямой, проходящей через  $O'$  и перпендикулярной  $OO'$ . Но  $O'$  – это центр окружности девяти точек треугольника  $ABC$ , т.е. середина отрезка между его центром описанной окружности  $O$  и ортоцентром  $H$ . Следовательно, центр описанной окружности  $XYZ$  лежит на серединном перпендикуляре к  $OH$ , откуда и следует утверждение задачи.

А.Заславский

**M2035.** а) На окружности расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на три группы подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

б\*) На отрезке расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на  $n$  групп подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

а) Сделаем задачу более наглядной. Будем считать, что наша окружность имеет длину, равную сумме всех чисел. Разобьем ее на дуги, равные нашим числам (и идущие в том же порядке). Тогда нужно разрезать окружность по границам дугек на три дуги так, чтобы длины этих больших дуг различались не более чем на 1.

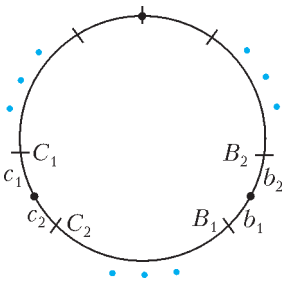


Рис. 1

Отметим три точки на окружности так, чтобы они разделили ее на три равные дуги, причем одна из них попала на границу дужек (рис.1). Пусть остальные две точки разбили дужки, на которые они попали, на участки длины  $b_1, b_2$  и  $c_1, c_2$  соответственно ( $b_1 + b_2 \leq 1, c_1 + c_2 \leq 1$ ; если точка попала на границу дужки, то соответствующее число равно нулю). Концы этих дужек обозначим соответствующими заглавными буквами. Покажем, что можно сместить каждую из отмеченных точек в один из концов соответствующей дужки так, чтобы все три дуги различались не больше чем на 1.

При смещении в точки  $C_1$  и  $B_1$  разность левой и правой дуг изменяется на  $-c_1 - b_1$ , а разности левой и правой дуг с нижней – на  $(-c_1) - (-b_1 + c_1) = b_1 - 2c_1$  и  $b_1 - (-b_1 + c_1) = 2b_1 - c_1$  соответственно. Таким образом, для того чтобы это смещение подходило, нужно выполнение системы неравенств

$$(B_1, C_1) : \begin{cases} |b_1 + c_1| \leq 1, \\ |2c_1 - b_1| \leq 1, \\ |2b_1 - c_1| \leq 1. \end{cases}$$

Записывая условия для сдвигов в остальные пары точек, получаем следующие системы:

$$(B_2, C_2) : \begin{cases} |b_2 + c_2| \leq 1, \\ |2c_2 - b_2| \leq 1, \\ |2b_2 - c_2| \leq 1; \end{cases}$$

$$(B_1, C_2) : \begin{cases} |b_1 - c_2| \leq 1, \\ |2c_2 + b_1| \leq 1, \\ |2b_1 + c_2| \leq 1; \end{cases}$$

$$(B_2, C_1) : \begin{cases} |b_2 - c_1| \leq 1, \\ |2c_1 + b_2| \leq 1, \\ |2b_2 + c_1| \leq 1. \end{cases}$$

Предположим, что ни одна из них не выполнена. Рассмотрим первые две системы. Неравенства  $b_1 + c_1 \leq 1$  и  $b_2 + c_2 \leq 1$  не могут нарушаться одновременно, так как  $b_1 + b_2 + c_1 + c_2 \leq 2$ . Поэтому будем считать, что  $b_1 + c_1 \leq 1$  и нарушается одно из двух других неравенств для  $(B_1, C_1)$ . Поскольку эти случаи симметричны, будем считать, что  $2c_1 > 1 + b_1$ . Заметим, что тогда  $0 \leq b_1 + 2c_2 \leq b_1 + 2(1 - c_1) = 2 - (2c_1 - b_1) < 1$ , и первые два неравенства для  $(B_1, C_2)$  выполнены (первое выполнено всегда). Значит,  $2b_1 + c_2 > 1$ , откуда получаем

$$1 < 2b_1 + c_2 \leq 2b_1 + 1 - c_1 < 2b_1 + 1 - \frac{1 + b_1}{2} = \frac{3b_1 + 1}{2},$$

т.е.  $b_1 > \frac{1}{3}$ , а тогда  $c_1 > \frac{1 + b_1}{2} > \frac{2}{3}$ . Но при этом  $c_1 + b_1 > 1$ , что противоречит нашему выбору. Утверждение доказано.

*Замечание.* Другое решение, разумеется, можно получить из решения пункта б).

б) Мы будем пользоваться тем же наглядным представлением – естественно, с заменой окружности на отрезок. Задача при этом переформулируется так. На отрезке отмечены несколько точек, причем расстояние между любыми двумя соседними не больше 1. Требуется доказать, что можно разрезать отрезок в  $n - 1$  точке из них так, что отрезок распадется на  $n$  отрезков, различающихся не больше чем на 1. (Разрез в точке можно сделать дважды; тогда одна из частей будет иметь нулевую длину.)

Заметим, что множество способов разреза конечно. Назовем каждый такой способ *разбиением*. Мы некоторым специальным образом выберем из этого множества одно разбиение и покажем, что оно подходит. Выбирать мы будем в несколько этапов, «сужая» область поиска.

1. Выберем все разбиения, в которых длина наибольшего получающегося отрезка – наименьшая возможная (обозначим эту длину через  $m$ ).

2. Отберем из них те, в которых количество отрезков длины  $m$  минимально.

3. А из них – те, в которых минимально количество отрезков, меньших  $m - 1$ .

Если это количество равно нулю – мы уже получили хорошее разбиение. Если нет, то продолжаем процедуру выбора.

4. Наконец, выберем такое разбиение, в котором между каким-нибудь отрезком длины  $m$  и каким-нибудь длины  $< m - 1$  находится минимальное возможное число отмеченных точек (включая их концы).

Рассмотрим пару отрезков:  $U$  с максимальной длиной  $m$  и  $V$ , длина которого меньше  $m - 1$ , причем число

точек  $k$  между ними минимально (рис.2).

Пусть, без ограничения общности,  $U$  находится справа от  $V$ . Если  $k = 1$  ( $U$  находится непосредственно справа от  $V$ ), то передвинем точку разреза между ними вправо. Тогда длина  $U$  уменьшится, а длина  $V$  останется меньше  $m$ , так как она увеличилась не больше чем на 1; следовательно, число отрезков длины  $m$  уменьшилось, что противоречит этапу 2 выбора.

Если  $k > 1$ , то передвинем точку разреза между ними вправо. Тогда длина  $U$  уменьшится, а длина  $V$  останется меньше  $m$ , так как она увеличилась не больше чем на 1; следовательно, число отрезков длины  $m$  уменьшилось, что противоречит этапу 2 выбора.

Пусть  $U$  и  $V$  – не соседние. Будем передвигать правую границу отрезка  $V$  вправо до тех пор, пока его длина не превысит  $m - 1$ ; так как длина отрезка  $W$  справа от него не меньше  $m - 1$ , то этот момент наступит. При этом длина  $V$  остается меньше  $m$ ; следовательно, максимальная длина отрезка или количество отрезков такой длины не могли увеличиться.

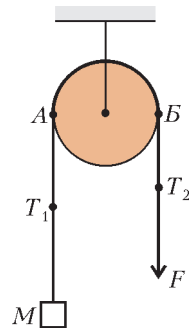
После сдвига границы исчез один отрезок длины  $< m - 1$ . Значит, либо их количество уменьшилось, либо теперь отрезок  $W$  имеет длину, меньшую  $m - 1$ . Но, очевидно, между  $W$  и  $U$  меньше точек, чем было между  $V$  и  $U$  – противоречие с этапом 4 выбора. Итак, если выбрать нужное разбиение не удалось, то мы пришли к противоречию, что и требовалось.

*Замечание.* На первый взгляд, можно было бы попытаться придумать решение, аналогичное решению пункта а): разбить отрезок на  $n$  равных частей, а затем

попытаться сдвинуть каждую из точек разбиения в одну из двух ближайших отмеченных точек. Однако авторам известен пример (при достаточно больших  $n$ ), в котором при любом таком сдвиге найдутся два отрезка разбиения с разностью, большей 1 (а оптимальное разбиение устроено другим образом). Мы предоставляем читателю попытаться самостоятельно построить такой пример.

И.Богданов, Г.Челноков

**Ф2043.** Груз массой 3 кг поднимают и опускают при помощи легкой нити и блока, ось которого закреплена неподвижно. Однажды блок «заело» – он перестал вращаться вокруг своей оси. При этом удается поднимать груз силой 40 Н, приложенной к свободному концу нити, и груз в этом случае движется вверх с постоянной скоростью. Какой груз нужно подвесить к свободному концу нити, вместо того чтобы тянуть нить, чтобы груз массой 3 кг двигался с той же скоростью вниз? Трение между нитью и блоком – сухое, коэффициент трения не зависит от прижимающего усилия.



При равномерном движении груза массой  $M$  вверх сила натяжения нити слева от блока  $T_1 = Mg$ , справа  $T_2 = F$  (см. рисунок). Разница этих сил определяется силой трения нити о «заевший» блок и пропорциональна средней силе прижима нити к поверхности блока:

$$F - Mg = \alpha \frac{F + Mg}{2}.$$

Принимая  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , получим

$$\alpha = \frac{2(F - Mg)}{F + Mg} = \frac{2(40 - 30) \text{ Н}}{(40 + 30) \text{ Н}} = \frac{2}{7}.$$

Во втором случае груз массой  $M$  равномерно опускается под воздействием подвешенного груза массой  $m$ . При этом силы натяжения нити равны  $T_1^* = Mg$  и  $T_2^* = mg$  слева и справа от блока соответственно. Тогда

$$Mg - mg = \alpha \frac{Mg + mg}{2},$$

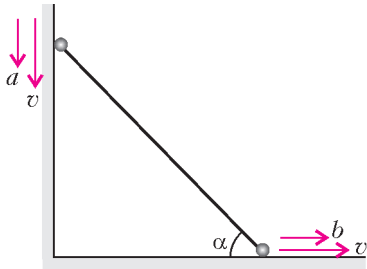
откуда находим искомую массу груза:

$$m = \frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} M = \frac{3}{4} M = 2,25 \text{ кг}.$$

Кстати, точное решение (учитывающее изменение прижимающей силы от точки  $A$  до точки  $B$  – вместо расчета по «средней силе прижима») дает такой же ответ.

А.Блоков

**Ф2044.** Гантелька состоит из тонкого легкого стержня длиной  $L$  и двух одинаковых маленьких шариков массой  $M$  каждый на концах стержня. В начальный момент гантелька стоит в углу комнаты вертикально, опираясь на пол и вертикальную стену. От очень малого толчка гантелька начинает двигаться, при этом один из концов скользит по полу, а другой



продолжает касаться стены. Найдите силы, с которыми гантелька действует на пол и стену в тот момент, когда она составляет угол  $45^\circ$  с вертикалью. Трения нет.

Обозначим скорость верхнего шарика  $v$ , ускорение в интересующей нас точке пусть будет  $a$  (см. рисунок). При значении угла  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом нижний шарик имеет такую же скорость  $v$ , а ускорение его обозначим  $b$ . Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = MgL\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

или

$$v^2 = gL\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Зададим очень малый интервал времени  $\tau$ . Скорости шариков изменятся на очень малые величины  $\Delta v_{\text{верт}} = a\tau$  и  $\Delta v_{\text{гориз}} = b\tau$ . Снова применим закон сохранения энергии:

$$Mg \cdot v\tau = \left(\frac{M(v + \Delta v_{\text{верт}})^2}{2} - \frac{Mv^2}{2}\right) + \left(\frac{M(v + \Delta v_{\text{гориз}})^2}{2} - \frac{Mv^2}{2}\right),$$

откуда

$$gv = va + \frac{a^2\tau}{2} + vb + \frac{b^2\tau}{2},$$

или при малом  $\tau$

$$a + b = g.$$

За малое время  $\tau$  угол  $\alpha$  немного уменьшится, найдем его тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(L/\sqrt{2}) - v\tau}{(L/\sqrt{2}) + v\tau} = \frac{v_{\text{гориз}}}{v_{\text{верт}}} = \frac{v + b\tau}{v + a\tau}.$$

Отсюда получим

$$\frac{L}{\sqrt{2}}v + \frac{L}{\sqrt{2}}a\tau - v^2\tau - av\tau^2 = \frac{L}{\sqrt{2}}v + \frac{L}{\sqrt{2}}b\tau + v^2\tau + bv\tau^2.$$

После очевидных упрощений запишем

$$\frac{L}{\sqrt{2}}(a - b) = 2v^2,$$

или

$$a - b = 2g(\sqrt{2} - 1).$$

Решая полученные для  $a$  и  $b$  уравнения, найдем

$$a = g \frac{2\sqrt{2} - 2 + 1}{2} = g(\sqrt{2} - 0,5) \approx 0,91g,$$

$$b = g\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \approx 0,09g.$$

Найти силу  $Q$  со стороны вертикальной стены и силу  $N$  со стороны пола проще всего, записав уравнения второго закона Ньютона для центра масс гантельки (чтобы не связываться с величиной силы натяжения стержня):

$$Q = M \cdot 0 + Mb = Mg(1,5 - \sqrt{2}),$$

$$2Mg - N = M \cdot 0 + Ma,$$

откуда

$$Q = Mg(1,5 - \sqrt{2}),$$

$$N = 2Mg - Ma = Mg(2,5 - \sqrt{2}).$$

Можно было заранее проверить, не оторвется ли гантелька от вертикальной стены раньше, чем угол  $\alpha$  уменьшится от  $90^\circ$  до  $45^\circ$ . Но это не обязательно – силу  $Q$  мы получили положительную.

А. Зильберман

**Ф2045.** Массивный клин с углом  $60^\circ$  при основании может двигаться по гладкому горизонтальному столу. На наклонной поверхности клина находится маленькая тележка. Когда тележка едет по неподвижному клину – мы его удерживаем, приложив к нему горизонтальную силу, – она давит на его поверхность силой  $f$ . Увеличим горизонтальную силу, действующую на клин, так, чтобы он двигался по горизонтали с постоянным ускорением. Найдите величину этой силы, если известно, что сила, с которой тележка давит на поверхность клина, стала вчетверо больше по величине. Масса клина в 5 раз больше массы тележки.

Обозначим массу тележки  $m$ , массу клина  $M$ . При неподвижном клине сила давления тележки на клин (она равна по величине силе нормальной реакции, действующей на тележку со стороны клина; рис.1) равна  $f = mg \cos \alpha$ . Пусть ускорение клина направлено влево и составляет  $a$  (рис.2). Ускорение тележки удобно

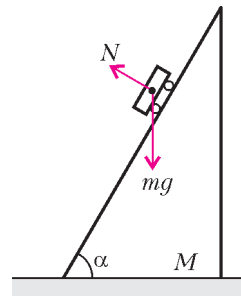


Рис. 1

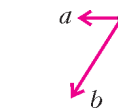


Рис. 2

представить в виде суммы двух векторов – ускорения вместе с клином  $\vec{a}$  и ускорения относительно клина  $\vec{b}$ , при этом вектор  $\vec{b}$ , его нас не просили находить, составляет угол  $\alpha$  с горизонталью. Запишем уравнение второго закона Ньютона для тележки в перпендикулярном к  $\vec{b}$  направлении:

$$4f - mg \cos \alpha = m a \sin \alpha,$$

откуда для ускорения клина получим

$$a = \frac{4f - mg \cos \alpha}{m \sin \alpha} = 3g \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}g.$$



Для клина в горизонтальном направлении запишем

$$F - 4f \sin \alpha = Ma,$$

откуда найдем искомую силу:

$$F = 4f \sin \alpha + Ma = 4f \sin \alpha + 5mg\sqrt{3} = \\ = f \left( 4 \sin \alpha + \frac{5\sqrt{3}}{\cos \alpha} \right) = 12\sqrt{3}f.$$

З.Рафаилов

**Ф2046.** В двух одинаковых сосудах находятся одинаковые массы кислорода и гелия. Давление кислорода 1 атм, давление гелия 2 атм. Сосуды соединяют тонкой трубкой, и газы перемешиваются. Каким станет давление в системе после установления равновесия? Теплообмен с окружающей средой пренебрежимо мал. Молярная масса кислорода 32 г/моль, гелия 4 г/моль.

При одинаковых массах кислорода и гелия их количества вещества связаны соотношением  $\nu_2 = 8\nu_1$ . С учетом того, что  $p_2 = 2p_1$ , для температур получим  $T_1 = 4T_2$ . При смешивании газов суммарная внутренняя энергия остается неизменной (теплообмена нет, работа внешних сил равна нулю). Тогда запишем

$$U = \frac{5}{2} R\nu_1 T_1 + \frac{3}{2} R\nu_2 T_2 = \frac{5}{2} R\nu_1 T_x + \frac{3}{2} R\nu_2 T_x.$$

Отсюда найдем установившуюся температуру  $T_x$ :

$$T_x = \frac{5\nu_1 T_1 + 3\nu_2 T_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} = \frac{11}{29} T_1.$$

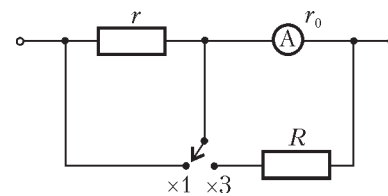
Установившееся же давление будет равно

$$p = \frac{(\nu_1 + \nu_2) RT_x}{2V} = \frac{\nu_1 RT_1 \cdot 9 \cdot 11}{V \cdot 2 \cdot 29} \approx 1,7p_1 = 1,7 \text{ атм.}$$

А.Повторов

**Ф2047.** Многопредельный ампер-вольтметр для измерений в цепях постоянного тока сделан на основе

точного микроамперметра с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 850 Ом. При помощи многопозиционного переключателя к нему подключаются точно подобранные резисторы – добавочные сопротивления для измерения напряжений и шунты для измерения токов. Пределы измерения напряжений 1 В, 10 В и 100 В, пределы измерения токов 1 мА, 10 мА и 100 мА. Хотелось бы иметь более «подробные» пределы измерений, но кардинально переделывать точный и удобный прибор совсем не хочется. На передней панели прибора есть отдельный, не используемый для его работы переключатель на два положения – у переключателя три контакта. В одном положении соединены между собой контакты 1 и 2, а контакт 3 отключен, при другом положении отключен контакт 2, а соединены контакты 1 и 3. Придумайте и рассчитайте простую схему, которая позволяла бы «растянуть» шкалы прибора ровно в три раза на всех пределах измерения (шкала измерения напряжений 10 В превращается в 30 В, шкала измерения токов 1 мА – в 3 мА и т.д.) в одном из положений этого переключателя, а в другом положении все должно оставаться «как было». Кстати, эти положения переключателя можно обозначить  $\times 1$  и  $\times 3$ .



Самая простая из всех возможных схем (попробуйте решить проблему попроще – ничего у вас не выйдет!) приведена на рисунке. Ясно, что

$$R = \frac{1}{2} r_0, \text{ а } r + \frac{r_0 R}{r_0 + R} = r_0, \text{ т.е. } r = \frac{2}{3} r_0.$$

Итак,

$$R = \frac{1}{2} r_0 = 425 \text{ Ом}, \text{ } r = \frac{2}{3} r_0 \approx 567 \text{ Ом.}$$

Р.Александров

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

### Головоломка «Дельта»

(Начало см. на 2-й с. обложки)

С головоломкой «Дельта» молодая изобретательница Ирина Новичкова в 2006 году ездила на съезд любителей головоломок в Бостон, США. Приехавшие туда знатоки не смогли «с ходу» решить задачу Ирины, и более ста экземпляров игрушки участники соревнований увезли в разные страны мира в надежде, что дома им «стены помогут» одолеть головоломку из России. На самом деле, в Бостоне просто некогда было решать трудные задачки.

Чтобы сделать головоломку «Дельта», нужно взять 12 одинаковых пластинок квадратного сечения и толщиной, равной половине ширины пластинки.

Каждую деталь головоломки склеивают из двух пластинок со срезанными двумя способами углами. У шести пластинок отрезают углы наискосок так, чтобы одно из оснований имело форму пятиугольника, а шесть остальных пластинок разрезают наискосок по диагонали (см. фото на 2-й с. обложки). Получают 12 заготовок двух видов. Их склеивают попарно так, чтобы получить шесть деталей головоломки двух разных конфигураций – по три каждого вида.

После этого остается склеить из плотной бумаги или тонкого картона шестигранную коробочку, и головоломка готова к решению. Длина каждой из шести боковых сторон коробочки должна быть в 3,5 раза больше толщины пластины, а высота коробки – больше в 2,5 раза.

А.Калинин

# Задачи

1. Обозначим  $P(n)$  произведение цифр натурального числа  $n$ , причем если число  $n$  само является цифрой, то  $P(n) = n$ . Например:  $P(5) = 5$ ,  $P(25) = 10$ . Последовательно записаны, такие числа:

$$1 + P(1), 2 + P(2), 3 + P(3), \dots$$

Могут ли в этой последовательности 2007 подряд идущих чисел оказаться последовательными натуральными числами?

*С.Дворянинов*



2. На острове проживают аборигены, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Как-то встретились три аборигена: Ах, Ох и Ух. Один из них сказал: «Ах и Ох — оба лжецы», другой сказал: «Ах и Ух — оба лжецы» (но кто именно что сказал — неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трех аборигенов?

*Е.Барабанов*



3. Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает подобрать десять различных натуральных чисел таких, чтобы их наибольший общий делитель совпал с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать?

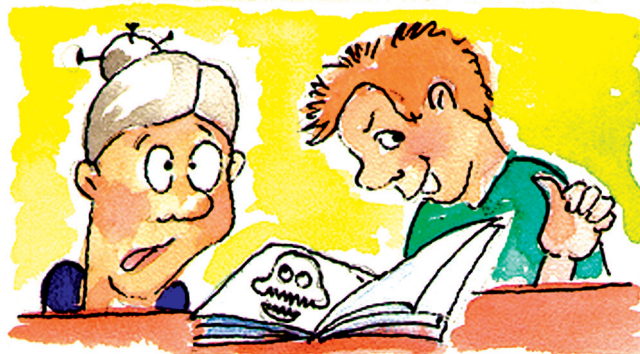
*А.Жуков*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Петя на каждом листе тетради из 96 листов нарисовал веселую рожицу (в анфас) либо с одной, либо с другой стороны листа, так что если положить закрытую тетрадь на стол, то некоторые рожицы будут «смотреть» на него, а остальные — от него. Верно ли, что можно раскрыть тетрадь (или вообще не раскрыть) в таком месте, чтобы на Петю и от него «смотреть» одинаковое количество рожиц?

*И.Акулич*



5. Правильный восьмиугольник разрезан на части, которые закрашены в четыре цвета. Докажите, что каждым цветом закрашена одна и та же площадь.

*В.Произволов*

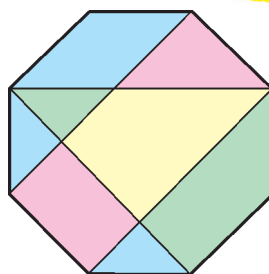


Иллюстрация Д.Гришуковой

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

*Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. В этом номере мы собрали задачи авторов из разных стран мира: США, Израиля, Румынии, России, Белоруссии. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.*

*Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.*

**1.** Нумизмат выложил 100 монет разных стран в одну линию. Оказалось, что любые две соседние монеты весят почти одинаково, а именно, разница их масс строго меньше 0,01 грамма. Всегда ли удастся эти монеты так перегруппировать, а потом расположить по кругу, чтобы массы любых двух соседних монет на окружности отличались менее чем на 0,02 грамма?

*Г.Гальперин*

**2.** а) Нарисуйте три круга, при пересечении которых образуются шесть областей, обладающих следующим свойством: в них можно расставить числа от 1 до 6 так, чтобы сумма чисел внутри каждого круга была одной и той же и максимально возможной.

б) Нарисуйте три круга, при пересечении которых образуются шесть областей, для которых невозможна расстановка чисел от 1 до 6 так, чтобы суммы чисел внутри всех кругов были одинаковы.

в) Обозначим максимальную сумму, полученную в решении задачи а), через  $M$ . Нарисуйте три многоугольника, при пересечении которых образуются шесть областей, обладающих следующим свойством: в них можно расставить числа от 1 до 6 так, чтобы сумма

чисел внутри каждого многоугольника была одной и той же и превышала  $M$ .

*И.Хейфец*

**3.** Докажите, что любые попарно различные нечетные натуральные числа  $m, n, p, q, r$  удовлетворяют неравенству

$$mnpqr + mnpr + mnqr + mprq + nprq +$$

$$+ 201 \leq 2mnpqr.$$

*В.Кириак*

**4.** Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, разрешил его диагональ пополам. Докажите, что четырехугольник является трапецией или параллелограммом.

*В.Произволов*

**5.** За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую клетку шахматной доски, а также все клетки, имеющие с ней общую сторону. Можно ли за несколько ходов перекрасить в противоположный цвет все клетки доски?

*И.Акулич*

## Победители конкурса имени А.П. Савина «Математика 6–8» 2006/07 учебного года

**Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:**

*Кагаловский Таль* — Беэр-Шева (Израиль), школа «Эшель-Ханаси», 8 кл.,

*Лисичкин Сергей* — Харьков, гимназия 47, 7 кл.,

*Габидулина Надежда* — Севастополь, 8 кл.,

*Кадец Борис* — Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл.,

*Дудкин Александр* — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,

*Родионов Георгий* — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,

*Гулин Всеволод* — Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл.,

*Ибраимова Айжана* — Бишкек, ФМШЛ 61, 8 кл.,

*Рубаненко Мария* — Харьков, школа 106, 7 кл.,

*Хрущёв Тимур* — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,

*Теплова Даша* — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,

*Мищенко Николай* — Краснодар, школа 93, 6 кл.

**и кружки:**

Математического клуба при университете им. Д.Бен-Гуриона в Негеве (Израиль), руководители *П.Самовол, И.Хейфец,*

«Эврика» при ФМЛ 27, Харьков, руководители *А.Л.Берштейн, Е.Л.Аринкина,* школы 146, Пермь, руководители *О.Н.Чичагова, А.М.Бурштейн,*

Центра дополнительного математического образования, Курган, руководитель *О.И.Южаков,* Малого университета при Харьковском национальном

университете им. В.Н.Каразина, руководители С.А.Лифиц, А.С.Щербина, школы 9, Пермь, руководитель Г.А.Одинцова, школы 5, Магнитогорск, руководитель А.В.Христева, «Сигнум» при филиале РГСУ, Чебоксары, руководитель С.А.Иванов, лицея 130, Новосибирск, руководитель Л.Н.Чусовитина, гимназии 1, Самара, руководитель А.А.Гусев, ФМШЛ 61, Бишкек, руководитель Л.С.Хохлова.

**Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих учеников:**

Кислинского Алексея – Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл.,

Филимоновой Карины – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
Цыбышева Алексея – Самара, гимназия 1, 7 кл.,  
Софронова Александра – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
Мейстера Давида – Санкт-Петербург, ФМЛ 366, 8 кл.,  
Комисарчука Евгения – Санкт-Петербург, 8 кл.,  
Матвеевского Дмитрия – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,  
Лийко Виктории – Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл.,  
Коншина Александра – Москва, школа 1361, 8 кл.,  
Булгаковой Дарьи – Нижний Тагил, 8 кл.

**и кружка**

лицея 67, Иваново, руководитель А.В.Шеронова.

# Только ноль и единица

Л. ШИБАСОВ, З. ШИБАСОВА

**Н**АВЕРНЯКА ВАМ ЗНАКОМА СЛЕДУЮЩАЯ ЗАДАЧА. Задумано натуральное число, не превосходящее  $N$ . Какое наименьшее число вопросов надо задать, получая в ответ лишь «да» или «нет», чтобы отгадать это число?

Приведем стандартное решение для случая  $N = 2^{n+1}$ . Весь массив чисел делят пополам и спрашивают: «Задуманное число находится в первой половине?» В зависимости от ответа выбирают половину, содержащую искомое число, вновь делят ее пополам и повторяют аналогичный вопрос. Всего понадобится  $(n+1)$  вопросов. Очевидно, столько же вопросов понадобится и в случае, когда  $2^n < N < 2^{n+1}$ ; но здесь может оказаться достаточно  $n$  вопросов, поскольку на некотором шаге при делении числового массива получаются неравные части и задуманное число может оказаться в

меньшей из них.

При таком решении вопросы задавались в зависимости от получаемых ответов. А можно ли обойтись  $n$  вопросами, без учета ответов? Оказывается, да. Для этого достаточно начать с вопроса: «Делится ли число на 2?» Если делится, то записать 0, если нет – то 1. Следующим надо задать вопрос: «Делится ли полученное частное на 2?» и снова записать остаток от деления на 2 и т.д. Занумеровав возникшую последовательность нулей и единиц:  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , находим искомое число  $m = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot 2^n$ . В нем коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – остатки от деления на 2 задуманного числа и сто последовательных частных.

Например, задумано число 83. При последовательном делении на два выписываем соответствующие частные, а в скобках – остатки от деления:  $83(1)$ ,

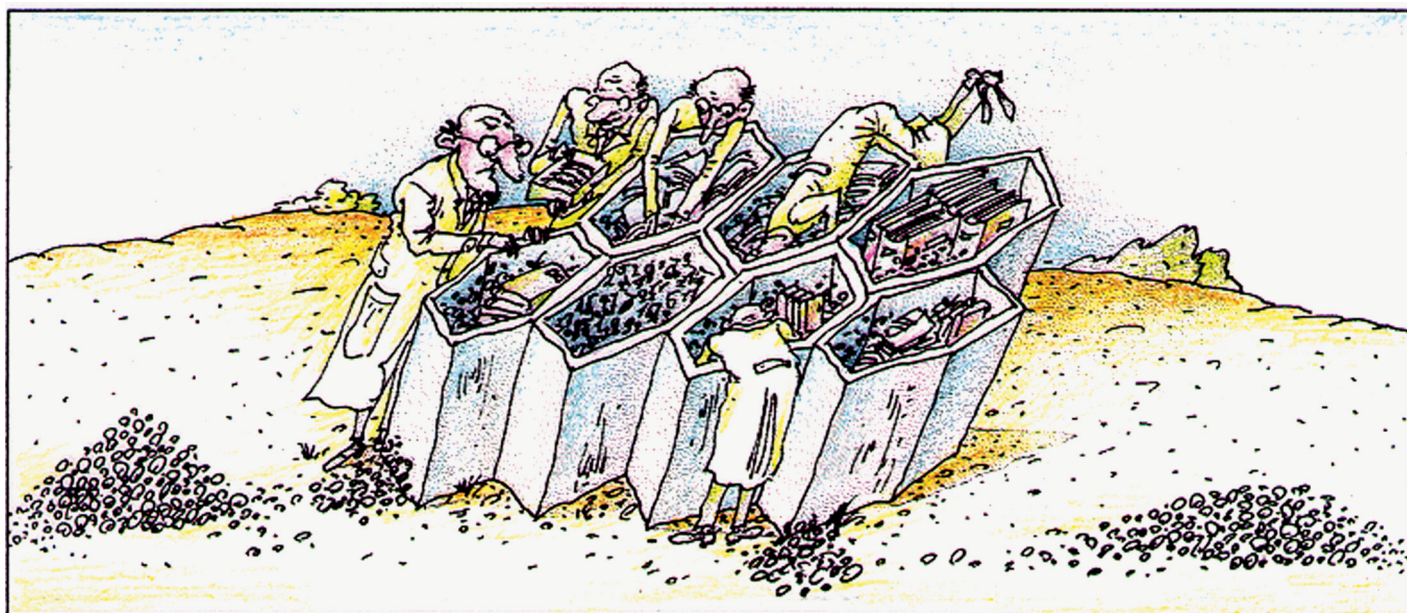


Иллюстрация В. Иванюк

41(1), 20(0), 10(0), 5(1), 2(0), 1(1). Откуда находим

$$1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 83.$$

Число представлено в виде суммы степеней двойки. Такая запись называется *двоичной*, правда, как и в привычной десятичной записи, ее принято начинать с наивысшего разряда:

$$m = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  равны 0 или 1,  $a_n = 1$ .

Часто используют более компактную запись:

$$m = (a_n \dots a_2 a_1 a_0)_2.$$

$$83 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 +$$

$$+ 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = (1010011)_2.$$

Чтобы иметь право говорить о двоичной системе счисления, надо показать единственность представления любого натурального числа в таком виде. Допустим, что число  $m$  имеет два различных представления:

$$m = (a_n \dots a_1 a_0)_2 = (b_k \dots b_1 b_0)_2, \quad n \geq k,$$

тогда

$$2(a_n \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 - b_k \cdot 2^{k-1} - \dots - b_1) = b_0 - a_0.$$

В этом равенстве левая часть делится на 2, значит,  $b_0 = a_0$ . Аналогично,  $b_1 = a_1$  и т.д. На  $k$ -м шаге получаем  $a_n \cdot 2^{n-k} + \dots + a_{k+1} = 0$ , что возможно лишь при  $a_n = \dots = a_{k+1} = 0$ .

Известно, что десятичная система счисления возникла в Индии примерно в V веке. А когда возникла двоичная система счисления? Точно установить дату невозможно, но уже за 4 тысячи лет до наших дней в Древнем Египте она фактически использовалась. Покажем на примере, как египетские жрецы перемножали числа.

Умножим число 213 на 37. В наших обозначениях египетская запись выглядит так:

/1	213
2	426
/4	852
8	1704
16	3408
/32	6816
вместе	7881

Поясним ее. Правый столбец содержит наибольший сомножитель и его удвоения (их получали сложением числа с самим собой); левый – числа вида  $2^m$ , на которые производилось умножение. Таблица выписывалась до тех пор, пока в левом столбце не появлялась максимальная степень двойки, не превосходящая меньшего сомножителя:  $2^5 < 37$ . Затем в левом столбце отмечали наклонной черточкой те числа (степени двойки), которые в сумме дают меньший сомножитель:  $37 = 32 + 4 + 1$ . Складывая числа правого столбца, стоящие напротив отмеченных чисел левого, получали ответ. Итак,

$$213 \times 37 = 213 \cdot (2^5 + 2^2 + 2^0) = 6816 + 852 + 213 = 7881.$$

Способ удвоения при умножении чисел оказался столь удобным, что применялся позже в других странах, в частности на Руси. Причем у нас торговые люди пользовались им так часто, что в странах Западной Европы способ удвоения называли «русским». Вот как в одной из старинных русских рукописей вычислялось произведение  $46 \times 28$ :

46	28
92	14
184	7(1)
368	3(1)
736	1

Числа левого столбца удваивались, а правого – *раздвигались*, т.е. делились на 2; так как 7 и 3 нечетные числа, то в скобках записывался остаток. Сложив числа первого столбца, стоящие против единиц второго, получали ответ. Объясняется правило просто – ведь раздвоение числа 28 равносильно его переводу в двоичную запись:  $28 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2$ , а поэтому  $46 \cdot 28 = 46 \cdot (2^4 + 2^3 + 2^2) = 736 + 368 + 184 = 1288$ .

Из всех систем счисления двоичная самая простая. При работе с числами в этой записи нужно помнить лишь, что при сложении двух единиц любого разряда получается единица следующего разряда ( $1 + 1 = 10$ ), а умножение единиц вновь дает единицу того же разряда ( $1 \cdot 1 = 1$ ). Несмотря на простоту действий, работать в двоичной системе счисления неудобно из-за громоздкой записи. Разделим, например, число  $(100011)_2$  на  $(101)_2$ :

$$\begin{array}{r} 100011 \mid 101 \\ - 101 \quad \mid 111 \\ \hline 111 \\ - 101 \\ \hline 101 \\ - 101 \\ \hline 0 \end{array}$$

Тот же пример в десятичной системе выглядит значительно короче ( $35 : 5 = 7$ ). Естественно, двоичная запись чисел по этой причине не могла конкурировать с десятичной. Но для электронных вычислительных машин, благодаря их быстродействию и огромной памяти, этот недостаток – не помеха. А поскольку все они работают на элементах, находящихся лишь в двух устойчивых состояниях (ток пропускается или нет), то для них двоичная система счисления оказалась наиболее удобной. Применяется она и в других приборах, в которых сигнал либо поступает, либо не поступает, например в телеграфии.

В практической деятельности к двоичной системе счисления почти не обращаются, но ее используют в теоретических вопросах и при решении различных задач. Приведем два примера.

**Задача 1** (выбирание камней). *Имеются три кучки камней с произвольным числом камней в каждой. Два игрока поочередно забирают из любой кучки произвольное число камней. Выигрывает тот, кто забирает камни последним.*

Американский математик Ч. Бутон назвал (1901 г.) эту игру «ним» (от устаревшей формы английского глагола *nit* – «брать») и описал алгоритм выигрыша в этой игре. Разберем его для первого игрока (начинающего игру). Сначала рассмотрим случай, когда в двух кучках одинаковое число камней. Первым ходом игрок не трогает эти кучки, а забирает все камни из третьей. Далее при любом ходе второго игрока первый уравнивает число камней в двух оставшихся кучках и выигрывает.

Чтобы дальнейшие рассуждения были более прозрачными, запишем числа  $a, b, c$ , выражающие количество камней в кучках, в двоичной системе счисления. Будем считать, что двоичные записи чисел  $a, b, c$  имеют одинаковое количество разрядов. Если это не так, то припишем нули в недостающих разрядах. Итак,

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2, \quad b = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0)_2, \\ c = (c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_2.$$

Найдем суммы цифр, стоящих в одинаковых разрядах:

$$S_n = a_n + b_n + c_n, \dots, S_1 = a_1 + b_1 + c_1, \\ S_0 = a_0 + b_0 + c_0.$$

В рассмотренном нами случае после каждого хода первого игрока все суммы  $S_i$  оказываются равными 0 или 2, т.е. четными. А поскольку выигрыш соответствует значениям  $S_n = \dots = S_1 = S_0 = 0$ , то стратегия выигрыша первого игрока следующая: после каждого своего хода он оставляет в кучках такое число камней, чтобы все  $S_i$  были четными. Для двух кучек это сделать легко, а как обстоит дело с тремя кучками?

Очевидно, любой ход второго игрока в ситуации, когда все  $S_i$  четные, меняет четность одной или нескольких сумм  $S_i$ . Покажем, что первый игрок может сделать такой следующий ход, в результате которого все  $S_i$  снова станут четными. Пусть  $k$  – наибольший из номеров, для которых суммы  $S_i$  нечетны. В сумме  $S_k = a_k + b_k + c_k$  одно из слагаемых либо все три равны 1. Предположим, что  $a_k = 1$ . Будем выбирать камни из первой кучки (содержащей  $a$  камней). Делается это следующим образом: рассматриваются лишь те  $a_i$ , для которых суммы  $S_i$  нечетны; если  $a_i = 1$ , то она заменяется нулем, в противном случае – единицей. В результате все  $S_i$  станут четными. Так как в наибольшем из измененных разрядов вместо  $a_k = 1$  появится 0, то полученное число меньше исходного. Разность между этими числами указывает, какое количество камней нужно взять из данной кучки. Например, в кучках 58, 42 и 13 камней. Так как

$$58 = (111010)_2, \\ 42 = (101010)_2, \\ 13 = (001101)_2,$$

то нечетны суммы  $S_4, S_3, S_2, S_0$ . Поэтому первое число 58 надо заменить числом  $(100111)_2 = 39$ . Таким образом, из первой кучки выбирается 19 камней.

Очевидно, алгоритм выигрыша не изменится, если

вместо трех кучек рассмотреть произвольное их число.

**Задача 2** (система разновесов). *Укажите наименьшее число гирь, с помощью которых можно уравновесить любую целую массу  $p$  от 1 до  $N$  граммов при условии, что груз и гири кладутся на разные чаши весов.*

Ясно, что гири в 1 г и 2 г необходимы; ими можно взвесить груз, не превосходящий 3 г, но уже для следующей массы придется брать новую гирю, масса которой не может превышать 4 г. Выгодно взять именно четырехграммовую гирю: вместе с ней удастся уравновесить все целые массы, меньшие 8 г. Легко сообразить, что если  $2^{n-1} \leq N < 2^n$ , то потребуется  $n$  гирь массами  $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$  граммов. Докажем это утверждение индукцией по  $n$ . При  $n = 1$  оно очевидно; предположим его верность при  $n = m$ : все грузы  $p$ , меньшие  $2^m$ , можно взвесить  $m$  гирями в  $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}$  граммов. Рассмотрим груз массой  $p < 2^{m+1}$ . Если при этом  $p < 2^m$ , то достаточно  $m$  гирь. В случае  $2^m \leq p < 2^{m+1}$  груз массой  $p - 2^m$  снова меньше  $2^m$ , значит, для его взвешивания хватит  $m$  гирь, а для груза в  $p$  граммов остается добавить гирю массой  $2^m$  граммов. Утверждение доказано.

Какие гири конкретно кладутся на чашу весов для уравновешивания груза  $p \leq N$ , определяется ненулевыми коэффициентами записи числа  $p$  в двоичной системе счисления.

Эта задача для отдельных фиксированных значений  $N$  стала популярной после того, как появилась в книге французского математика и поэта Баше де Мезириака «Приятные и занимательные задачи» (1612 г.). На практике же при взвешивании на рычажных весах продавец часто кладет гири на обе чаши весов. В такой более естественной постановке задача впервые появилась еще раньше в «Книге абака» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Пизанского. При ее решении Леонардо исходил из того, что любое целое число представимо в виде суммы или разности степеней тройки. Иными словами, он фактически записывал число в виде

$$N = b_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + b_2 \cdot 3^2 + b_1 \cdot 3 + b_0.$$

Только здесь, в отличие от записи в троичной системе счисления, коэффициенты принимают значения не 0, 1, 2, а 0, 1, -1. Связь между этими записями устанавливается легко. Если в троичной записи числа есть слагаемое  $2 \cdot 3^m$ , то, представив его в виде  $(3 - 1) \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m$ , придем к записи, в которой коэффициент 2 заменен на -1, а коэффициент следующего разряда увеличен на 1. Слагаемое  $-3^m$  появляется тогда, когда гиря массой  $3^m$  положена на ту же чашу весов, на которой находится груз. Наибольшим числом, записываемым таким образом, является сумма  $1 + 3 + \dots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$ . Поэтому для уравновешивания всех целых масс, не превосходящих  $(3^n - 1)/2$ , достаточно  $n$  гирь  $1, 3, \dots, 3^{n-1}$ .

# Об одной замечательной прямой в треугольнике

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

П УСТЬ ДАН ТРЕУГОЛЬНИК  $ABC$  (РИС.1),  $I$  – ЕГО ИНЦЕНТР, т.е. центр вписанной окружности,  $K_1, K_2, K_3$  – точки касания вписанной окружности со сторонами,  $M_1$  – середина стороны  $BC$ ,  $AH_1$  – высота, проведенная из вершины  $A$ . Оказывается, что прямая  $M_1I$  (и еще две аналогичные прямые, соединяющие середины двух других сторон с инцентром) обладает целым рядом свойств, помогающих решать большое количество задач. Об этих свойствах и их применениях мы и поговорим.

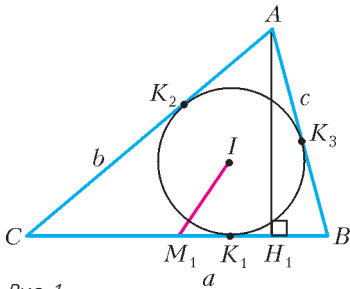


Рис. 1

### Свойства прямой $M_1I$

**Свойство 1.** Прямые  $M_1I$  и  $AT_1$ , где  $T_1$  – точка касания невписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$ , параллельны.

**Доказательство.** Пусть  $K_1D$  – диаметр вписанной в  $\triangle ABC$  окружности (рис.2). Касательная  $EF$  к этой окружности в точке  $D$  будет, очевидно, параллельна стороне  $BC$ .

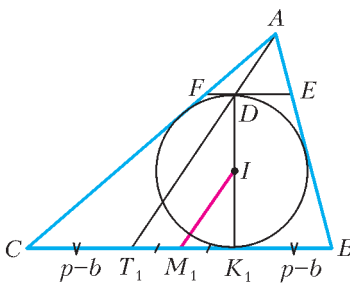


Рис. 2

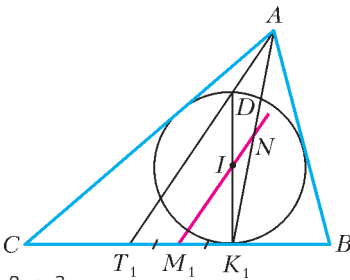


Рис. 3

Точка  $D$  является точкой касания невписанной окружности треугольника  $AEF$  со стороной  $EF$ . В свою очередь,  $T_1$  – точка касания невписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$ . Треугольники  $AEF$  и  $ABC$  гомотетичны с центром гомотетии в точке  $A$ . Поэтому  $A, D$  и  $T_1$  лежат на одной прямой. Кроме того,  $BK_1 = CT_1 = p - b$ , где  $p$  – полупериметр треугольника (докажите это!). Следовательно,  $T_1M_1 = M_1K_1$  и  $M_1I$  – средняя линия в  $\triangle DK_1T_1$ . А это и значит, что  $M_1I \parallel AT_1$ .

**Свойство 2.** Прямая  $M_1I$  делит отрезок  $AK_1$  пополам.

**Доказательство.** Пусть прямая  $M_1I$  пересекает  $AK_1$  в точке  $N$  (рис.3). Поскольку  $M_1I \parallel AT_1$  и  $T_1M_1 = M_1K_1$ , то  $M_1N$  – средняя линия в  $\triangle AK_1T_1$ . Таким образом,  $AN = NK_1$ .

Заметим, что свойство 2 может быть элегантно доказано с помощью **теоремы Ньютона**: если в четырехугольник вписана окружность, то ее центр расположен на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.

Действительно,  $\triangle ABC$  можно рассматривать как вырожденный четырехугольник  $ABK_1C$  ( $\angle BK_1C = 180^\circ$ ). Тогда, согласно теореме Ньютона, точки  $M_1$  и  $N$  (середины диагоналей), а также центр окружности  $I$  лежат на одной прямой.

**Свойство 3** Прямая  $M_1I$  отсекает от высоты  $AH_1$  отрезок  $AQ$ , равный радиусу вписанной в  $\triangle ABC$  окружности.

**Доказательство.** Поскольку  $ADIQ$  – параллелограмм (его противоположные стороны параллельны), то  $AQ = DI = r$  (рис.4).

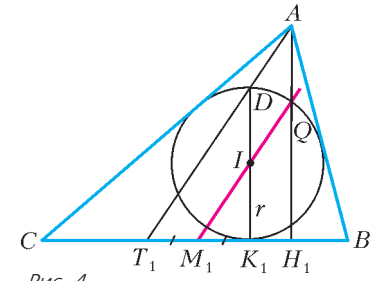


Рис. 4

Свойства 2 и 3 предлагались в качестве задач на II и III Всесоюзной математической олимпиаде соответственно.

Далее мы покажем, как «работают» свойства 1 – 3 прямой  $M_1I$ .

### Задачи на доказательство

**Задача 1.** Пусть  $M$  – центроид, т.е. точка пересечения медиан, треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $M_1I$  делит отрезок  $MK_1$  в отношении 1:3, считая от центроида  $M$ .

**Решение.** Поскольку  $T_1M_1 = M_1K_1$  и  $AM : MM_1 = 2 : 1$ , то точка  $M$  – центроид в  $\triangle AK_1T_1$  (рис.5). А значит,  $K_1M : MG = 2 : 1$ . Вместе с тем,  $M_1I \parallel AT_1$  (свойство 1) и  $K_1L = LG$ . Теперь нетрудно подсчитать, что  $ML : LK_1 = 1 : 3$ .

**Задача 2.** Пусть  $M_2, M_3$  – середины сторон  $AC$  и  $BA$  соответственно. Докажите, что прямая  $M_1I$  делит периметр  $\triangle M_1M_2M_3$  пополам.

**Решение.** Прямая  $AT_1$  делит периметр  $\triangle ABC$  пополам. Действительно,  $AC + CT_1 = b + p - b = p$  и  $M_1I \parallel AT_1$  (рис.6). Тогда  $AT_1$  и  $M_1I$  – соответственные прямые в гомотетичных треугольниках  $ABC$  и  $M_1M_2M_3$ .

**Задача 3.** Докажите, что прямые  $M_1I$ ,  $T_1M$  и  $AK_1$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Решая задачу 1, мы показали, что точка  $M$  является центроидом в треугольнике  $\triangle AK_1T_1$ , а значит, точки  $T_1, M$  и  $N$  лежат на одной прямой (см. рис.5). По свойству 2 точки  $M_1, I, N$  лежат на одной пря-

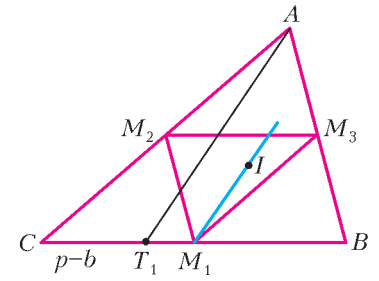


Рис. 5

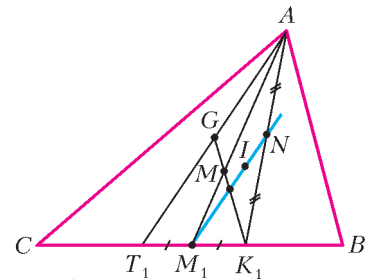


Рис. 6

(Продолжение см. на с.34)



# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ

• Согласно древней легенде, первую экстремальную задачу решала царица Дидона. Спасаясь от преследований своего брата, она высадилась во владениях нумидийского короля Ярба. Ярб разрешил выделить ей такой клочок земли, который можно ограничить бычьей шкурой. Находчивая Дидона вырезала из шкуры длинный тонкий ремешок и окружила им достаточно большую площадь в форме полукруга. По преданию, на этом месте возник город Карфаген.

• Вопросы, касающиеся наименьших и наибольших геометрических величин, встречаются в «Началах» Евклида (3 в. до н.э.). Например, в VI книге «Начал» содержится Предложение 27, в современной формулировке звучащее так: «Из всех параллелограммов, которые можно вписать в данный треугольник, наибольшую площадь имеет тот, основание которого равно половине основания треугольника». Средневековые комментаторы заметили, что таким приемом Евклида решается самая простая и самая древняя геометрическая задача на экстремум: «Какой из всех прямоугольников заданного периметра имеет наибольшую площадь?» Как указал Папп Александрийский (III в.), таким свойством обладает квадрат.

• Уже в Древней Греции было известно, что круг имеет большую площадь, чем все другие фигуры равного с ним периметра, а шар имеет наибольший объем среди всех тел с той же поверхностью. В начале второго века до нашей эры греческий геометр Зенодор написал специальный трактат «О фигурах, имеющих равную периферию». Это сочинение до нас не дошло. Однако у Паппа (III в.) и Теона Александрийского (IV в.) сохранились 14 предположений, заимствованных из этого сочинения. Среди них есть такие утверждения: «При одинаковом числе сторон и равных периметрах у правильного многоугольника площадь больше, чем у неправильного», «Из двух правильных многоугольников тот больше, у которого больше сторон», «Площадь круга больше площади любого правильного многоугольника, имеющего с кругом одинаковые периметры».

• В 1833 году швейцарский математик Якоб Штейнер издал книгу «О наибольших и наименьших значениях плоских фигур и о сфере», в которой геометрическими средствами исследовал многочисленные проблемы, касающиеся максимумов и минимумов. В частности, в ней доказывается, что круг является плоской фигурой, имеющей наименьший периметр из всех фигур заданной площади.

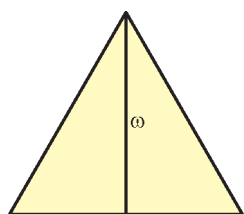


Рис. 1

• Шириной выпуклой фигуры называется ширина самой узкой полосы, в которую можно поместить данную фигуру. Среди всех фигур заданной ширины  $\omega$  наименьшую площадь  $S = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}}$  имеет равносторонний треугольник (рис.1). Существует сколь угодно много фигур заданной шири-

ны  $\omega$  с наибольшим радиусом  $r$  вписанной окружности  $\omega/2$  – годится любая фигура, расположенная в полосе ширины  $\omega$  и содержащая круг радиуса  $\omega/2$  (рис.2). Здесь, как обычно, вписанным кругом фигуры называется самый большой круг, содержащийся в фигуре.

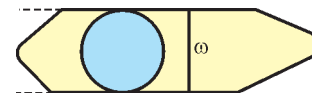


Рис. 2

• Среди фигур заданной ширины  $\omega$  наименьшим периметром  $\pi\omega$  обладают фигуры, для которых ширина самой узкой полосы, содержащей фигуру, не зависит от направления полосы. Такие фигуры получили название *фигур постоянной ширины*. Наряду с кругом имеются и другие фигуры постоянной ширины, например *треугольник Рело*. Он получается, если с центром в каждой вершине равностороннего треугольника провести дуги окружностей, соединяющих две другие вершины (рис.3).

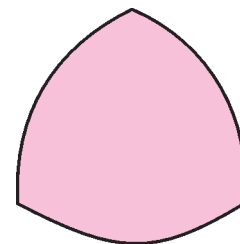


Рис. 3

• *Диаметром* выпуклой фигуры называется максимальное расстояние между ее точками. Среди всех фигур заданной ширины  $\omega$  фигуры постоянной ширины имеют наименьший диаметр  $D = \omega$ , а среди всех фигур заданного диаметра  $D$  они имеют наибольший периметр  $P = \pi D$ .

• Среди всех фигур заданного диаметра  $D$  наименьшим радиусом  $R$  описанной окружности  $D/2$  обладают фигуры с центром симметрии. (*Описанным кругом* фигуры называется самый маленький круг, в котором содержится фигура.) Наибольшим радиусом описанной окружности  $\frac{D}{\sqrt{3}}$  среди всех фигур заданного диаметра  $D$  обладает *фигура Ямагути*. В общем случае она строится следующим образом. Из каждой вершины равностороннего треугольника проводится дуга окружности радиуса, не превышающего сторону и не меньшего высоты треугольника. Затем из вершин треугольника проводятся касательные к этим дугам (рис.4).

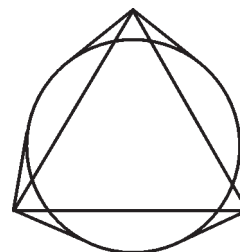


Рис. 4

Задач с двумя фиксированными параметрами больше, они труднее, класс экстремальных фигур богаче, некоторые задачи до сих пор не решены. В дальнейшем нам удобно будет называть  $(A, B, C)$ -задачей проблему поиска экстремальной плоской фигуры, у которой два геометрических параметра  $A$  и  $B$  фиксированы, а характеристика  $C$  достигает максимального или минимального значения. Здесь параметры – это рассмотренные ранее характеристики  $D, \omega, r, R, P, S$ . Формулы для минимальных и максимальных значений параметров в ряде случаев достаточно сложные, и мы их здесь не приводим.

Задач с двумя фиксированными параметрами больше, они труднее, класс экстремальных фигур богаче, некоторые задачи до сих пор не решены. В дальнейшем нам удобно будет называть  $(A, B, C)$ -задачей проблему поиска экстремальной плоской фигуры, у которой два геометрических параметра  $A$  и  $B$  фиксированы, а характеристика  $C$  достигает максимального или минимального значения. Здесь параметры – это рассмотренные ранее характеристики  $D, \omega, r, R, P, S$ . Формулы для минимальных и максимальных значений параметров в ряде случаев достаточно сложные, и мы их здесь не приводим.

$$\frac{D}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}D}{2}$$

$$S$$

$$K$$



$2\sqrt{3}$



Рис. 5

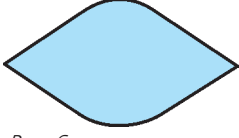


Рис. 6

• В  $(S, R, r)$ -задаче максимум  $r$  достигается на *круговом слое*, т.е. на пересечении круга с полосой, середина которой проходит через центр круга (рис.5), а минимум  $r$  — на *круге с шапками* (рис.6). Последняя фигура строится так: берутся две точки, симметричные относительно центра круга, и из этих точек проводятся касательные к кругу.

• В  $(S, R, D)$ -задаче максимум  $D$  достигается на фигуре постоянной ширины, а минимум — на вытянутом равнобедренном треугольнике. *Вытянутым равнобедренным треугольником* мы будем называть такой равнобедренный треугольник, в котором боковые стороны не меньше основания.

• В  $(S, R, P)$ -задаче максимум  $P$  достигается на *линзе* — фигуре, образованной пересечением двух равных кругов, расстояние между центрами которых меньше диаметра (рис. 7), а минимум  $P$  — на *почти правильном многоугольнике* (рис.8). Под последним мы подразумеваем такой многоугольник,

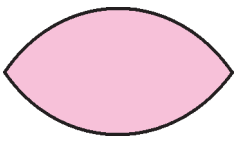


Рис. 7

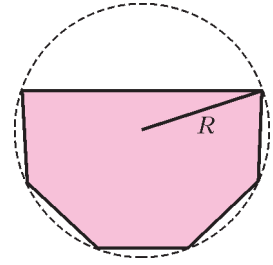


Рис. 8

который можно вписать в окружность радиуса  $R$ , причем длины всех сторон этого многоугольника, кроме одной, равны между собой, а оставшаяся сторона не меньше остальных.

• В  $(S, D, \omega)$ -задаче максимум  $\omega$  достигается на круговом слое, а вот минимум зависит от величины  $D$ . При  $\omega = \frac{\sqrt{3}D}{2}$  получается правильный треугольник, который при  $\omega < \frac{\sqrt{3}D}{2}$  превращается в неправильный (причем таких многоугольников существует множество), а при  $\frac{\sqrt{3}D}{2} < \omega \leq D$  возникает фигура Ямагути.

• Интересно проанализировать, как меняется экстремальная фигура, если зафиксировать один параметр и менять другой. В качестве примера рассмотрим задачу  $(S, \omega, P)$ -минимум. Зафиксируем значение  $\omega$  (например, примем  $\omega = 1$ ). Тогда  $P \geq \pi$ . Если  $P = \pi$ , то ответ — треугольник Рело, т.е. фигура Ямагути с радиусом, равным стороне правильного треугольника (1 в нашем случае). С ростом  $P$  сторона базового треугольника для фигуры Ямагути увеличивается (при сохранении радиуса дуг 1). Так продолжается до достижения периметром значения  $2\sqrt{3}$ . В этом случае радиус фигуры Ямагути совпадает с высотой равностороннего треугольника, равной 1, т.е. ответом является именно этот треугольник. При дальнейшем росте  $P$  деформируется уже треугольник — из равностороннего он становится равнобедренным, у ко-

торого боковые высоты сохраняют значение 1, а основание уменьшается.

Аналогично проанализируем задачу  $(S, \omega, P)$ -максимум (как и выше, полагая  $\omega = 1$ ). При  $P = \pi$  экстремальной фигурой является круг диаметра 1. С ростом  $P$  круг превращается в «пулю» (рис.9), у которой полу-круги диаметра 1 соединяются все более и более длинным прямоугольником. Например, отсюда следует, что из фигур, для которых  $P = \omega\pi$ , максимальную площадь имеет круг, а минимальную — треугольник Рело.

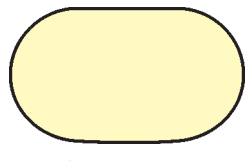


Рис. 9

• В задаче  $(P, D, \omega)$ -максимум экстремальная фигура строится аналогично круговому слою, если вместо круга берется любая фигура постоянного диаметра (рис.10). Здесь дополнительно длины отрезков  $AQ$  и  $BP$  должны равняться диаметру  $D$  — для круга это условие выполняется автоматически.

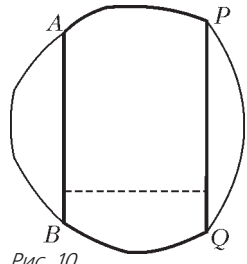


Рис. 10

В задаче  $(P, D, \omega)$ -минимум экстремальная фигура строится аналогично кругу с шапками, если вместо круга берется любая фигура постоянной ширины (рис.11). Здесь базовая область имеет постоянную ширину  $\omega$ , длины отрезков  $AB$  и  $CF$  равны  $\omega$ , прямые  $l_1, l_2$  (соответственно  $l_3, l_4$ ) перпендикулярны  $AB$  (соответственно  $CF$ ). Кстати, из этих условий следует, что все прямые  $l_1, l_2, l_3, l_4$  имеют с базовой областью по одной общей точке. Опять для круга с шапками все условия выполняются автоматически.

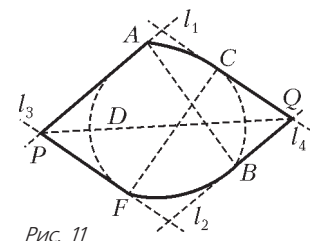


Рис. 11

• В задаче  $(\omega, R, r)$ -максимум экстремальной фигурой является раздутый правильный треугольник, который строится так. Отложим на лучах с полюсом в центре правильного треугольника, проходящих через его вершины, равные отрезки и с центрами в полученных точках проведем круговые дуги, соединяющие противоположные вершины треугольника. Если длины отрезков «бесконечно большие», то получим правильный треугольник, если же точки совпадают с центром треугольника, то получим круг. В число этих фигур входит и треугольник Рело. Только для таких фигур справедливо равенство  $\omega = R + r$ , для всех остальных справедливо неравенство  $\omega < R + r$ .

В задаче  $(\omega, R, r)$ -минимум экстремальных фигур также существует много. Дополнительно к условию, определяющему фигуры с максимальным  $\omega$  при заданном  $r$ , здесь требуется, чтобы радиус описанного круга равнялся  $R$ .

Материал подготовил Е. Бронштейн



(Начало см. на с.31)

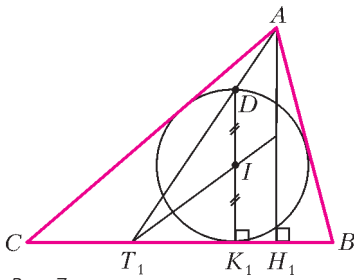


Рис. 7

мой. Таким образом, прямые  $M_1I$  и  $T_1M$  пересекаются в середине отрезка  $AK_1$ .

**Задача 4.** Докажите, что  $T_1I$  делит высоту  $AH_1$  пополам.

**Решение.** Прямая  $T_1I$  делит  $DK_1$  пополам ( $DI = IK_1 = r$ ; рис.7). Поскольку  $DK_1 \parallel AH_1$ , то прямая  $T_1I$  разделит пополам и высоту  $AH_1$ .

**Задачи на построение**

**Задача 5.** Постройте треугольник  $ABC$  по трем точкам: вершине  $A$ , инцентру  $I$  и центроиду  $M$ .

**Решение.** Соединим точки  $A$  и  $M$ , продлим  $AM$  на половину этого отрезка и получим  $M_1$  – середину  $BC$  (рис.8).

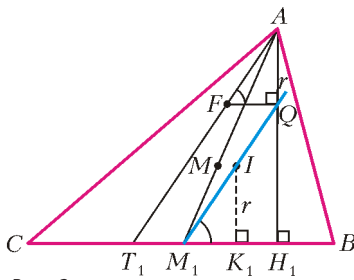


Рис. 8

Проведем прямую  $M_1I$ . Согласно ее свойствам,  $M_1I \parallel AT_1$  и  $M_1I$  отсекает от высоты  $AH_1$  отрезок  $AQ = r$ . Анализ показывает, что если провести через точку  $Q$  прямую параллельно  $BC$  – до пересечения с  $AT_1$  в точке  $F$ , то  $\Delta AQF = \Delta IK_1M_1$  (по катету и острому углу).

Отсюда и построение: через вершину  $A$  проведем прямую параллельно прямой  $M_1I$ . Отложим на ней отрезок  $AF = M_1I$ . Окружность, построенная на  $AF$  как на диаметре, пересечет прямую  $M_1I$  в точке  $Q$ . При этом  $AQ \perp BC$ . Дальнейшее построение очевидно.

**Задача 6.** Восстановите треугольник  $ABC$  по инцентру  $I$ , точке  $M_1$  – середине  $BC$ , а также прямой  $l$ , содержащей высоту  $AH_1$ .

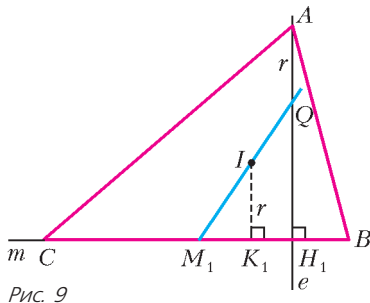


Рис. 9

**Решение.** Проведем через  $M_1$  прямую  $m$ , перпендикулярную  $l$ , перпендикуляр из точки  $I$  на эту прямую даст точку  $K_1$  и отрезок  $IK_1 = r$  (рис.9). Пусть  $M_1I$  пересечет  $l$  в точке  $Q$ . Отложив от точки  $Q$  вверх отрезок, равный  $r$ , получим вершину  $A$ . Касательные из точки  $A$  к окружности с центром  $I$  радиуса  $IK_1 = r$  пересекут прямую  $m$  в недостающих вершинах  $B$  и  $C$ .

**Задача 7.** Постройте треугольник  $ABC$  по высоте и медиане, проведенным из вершины  $A$ , и радиусу  $r$  вписанной окружности.

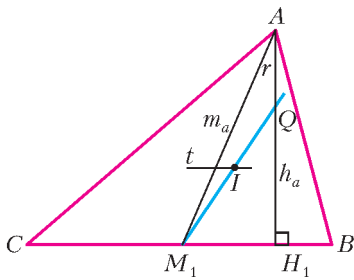


Рис. 10

**Решение.** Строим прямоугольный  $\Delta AH_1M_1$  по катету  $h_a$  и гипотенузе  $m_a$  (рис.10). Откладываем от  $A$  отрезок  $AQ = r$ . Прямая  $t$ , проведенная параллельно

**Задача 8.** Восстановите  $\Delta ABC$  по точкам  $M$ ,  $I$  и прямой  $t$ , содержащей сторону  $BC$ .

**Решение.** Из точки  $I$  проведем перпендикуляр  $IK_1$  к прямой  $t$ , причем  $IK_1 = r$  (рис.11). Соединим  $M$  и  $K_1$  и, разделив этот отрезок в отношении 1:3, получим точку  $L$  (задача 1). Прямая  $IL$  пересечет  $t$  в точке  $M_1$  – середине  $BC$ . Удвоим отрезок  $M_1M$ , получим вершину  $A$ . Касательные из  $A$  к окружности с центром  $I$  радиуса  $r$  пересекут  $t$  в вершинах  $B$  и  $C$ .

но  $H_1M_1$  на расстоянии  $r$  от нее, пересечет  $M_1Q$  в инцентре  $I$ . Дальнейшее очевидно.

**Задача 8.** Восстановите  $\Delta ABC$  по точкам  $M$ ,  $I$  и прямой  $t$ , содержащей сторону  $BC$ .

**Решение.** Из точки  $I$  проведем перпендикуляр  $IK_1$  к прямой  $t$ , причем  $IK_1 = r$  (рис.11). Соединим  $M$  и  $K_1$  и, разделив этот отрезок в отношении 1:3, получим точку  $L$  (задача 1). Прямая  $IL$  пересечет  $t$  в точке  $M_1$  – середине  $BC$ . Удвоим отрезок  $M_1M$ , получим вершину  $A$ . Касательные из  $A$  к окружности с центром  $I$  радиуса  $r$  пересекут  $t$  в вершинах  $B$  и  $C$ .

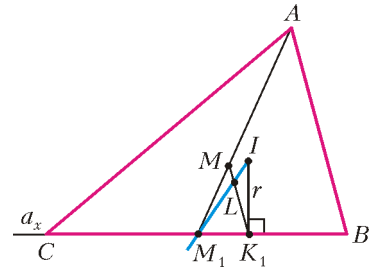


Рис. 11

**Задачи про треугольник, в котором  $b + c = 2a$**

Иногда, в связи с тем что  $b - a = a - c$ , такой треугольник называют *разностным*. А вообще это треугольник, у которого одна из сторон равна среднему арифметическому двух других сторон.

**Задача 9.** Дан  $\Delta ABC$ , в котором  $b + c = 2a$ . Докажите, что в нем  $QH_1 = 2r$ .

**Решение.** Поскольку  $M_1I$  отсекает от высоты  $h_a$  отрезок  $AQ = r$  (рис. 12), то

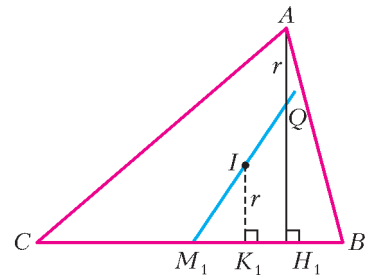


Рис. 12

$$\frac{QH_1}{QA} = \frac{h_a - r}{r} = \frac{h_a}{r} - 1 = \frac{2S/a}{S/p} - 1 = \frac{2p - a}{a} = \frac{b + c}{a} = \frac{2a}{a} = 2,$$

где  $S$  – площадь треугольника  $ABC$ . Значит,  $QH_1 = 2r$ .

*Следствие.* В разностном треугольнике  $h_a = 3r$ .

**Задача 10.** Докажите, что в разностном треугольнике  $M_1K_1 = K_1H_1$ .

**Решение.** Поскольку  $QH_1 = 2r$ , а  $IK_1 = r$  и к тому же  $IK_1 \parallel QH_1$ , то  $IK_1$  является средней линией в  $\Delta QH_1M_1$  (см. рис.12), т.е.  $M_1I = IQ$  и  $M_1K_1 = K_1H_1$ .

**Задача 11.** В разностном треугольнике  $MI \parallel BC$ . Докажите это.

**Решение.** Это очевидно, поскольку расстояния от центра  $I$  до стороны  $BC$  составляют  $\frac{1}{3}h_a = r$ .

*Следствие.* В разностном треугольнике прямые  $M_1I$  и  $MI$  делят высоту  $h_a$  на 3 равные части.

**Задача 12.** Инцентр  $I$  разностного треугольника  $ABC$  является центроидом треугольника  $AT_1H_1$ . Докажите это.

**Решение.** Поскольку  $M_1I = IQ$  (задача 10), то медиана  $H_1G$  треугольника  $AT_1H_1$  проходит через точку  $I$  (рис.13). Но тогда из параллельности прямых  $M_1I$  и  $AT_1$ , а также из равенства  $T_1M_1 = M_1K_1 = K_1H_1$  следует  $H_1I = 2IG$ . А это значит, что  $I$  – центроид  $\Delta AT_1H_1$ .

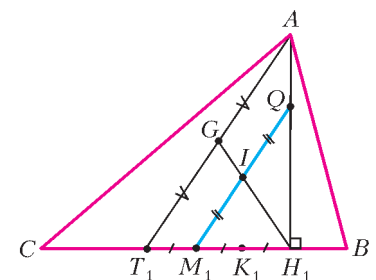


Рис. 13

**Задачи с прямоугольным треугольником**

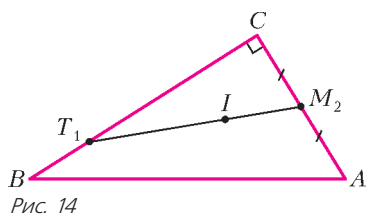


Рис. 14

пополам (задача 4), а в прямоугольном треугольнике катет AC совпадает с  $h_a$ , то задача решена.

**Задача 13.** Докажите, что в прямоугольном  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) точки  $T_1, I, M_2$  принадлежат одной прямой (рис.14).

**Решение.** Так как прямая  $T_1I$  делит высоту  $h_a$

**Задача 14.** Дан прямоугольный  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) с заданными положениями центра  $M$  и инцентра  $I$ . При помощи одной линейки разделите периметр этого треугольника пополам.

**Решение.** Прямая  $AM$  пересечет  $BC$  в точке  $M_1$  (рис.15). Прямая  $M_1I$  пересечет  $AC$  в точке  $Q$  такой, что  $AQ = r$  (свойство 3). Прямая  $BQ$  разделит периметр  $\triangle ABC$  пополам, ибо

$$c + r = c + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c}{2} = p.$$

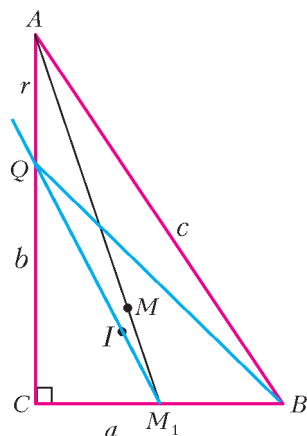


Рис. 15

**Задача 15.** В прямоугольном  $\triangle ABC$  через середину гипотенузы  $BC$  и инцентр  $I$  проведена прямая. Она пересекает катет  $AB$  под углом  $75^\circ$ . Найдите острые углы  $\triangle ABC$ .

**Решение.** Пусть прямая  $M_1I$  пересекает  $AH_1$  в точке  $Q$  и  $AB$  – в точке  $F$  (рис.16). Тогда, согласно условию,  $\angle BFM_1 = 75^\circ$ , а  $AQ = r$  (свойство 3). Кроме того,  $AI = r\sqrt{2}$  и  $\angle AIF = 30^\circ$

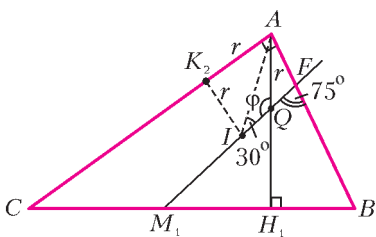


Рис. 16

(так как  $\angle BFM_1 = 75^\circ$  – внешний для  $\triangle AIF$ ).

Пусть  $\angle AQI = \varphi$ . По теореме синусов для  $\triangle AQI$  имеем

$$\frac{AI}{\sin \varphi} = \frac{AQ}{\sin 30^\circ}, \text{ или } \frac{r\sqrt{2}}{\sin \varphi} = \frac{r}{1/2},$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ и } \varphi = 135^\circ.$$

Из четырехугольника  $BFQH_1$  найдем угол  $B$ :

$$\angle B = 360^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ.$$

Тогда  $\angle C = 30^\circ$ .

**Задачи, связанные с вневписанной окружностью**

Заметим, что свойства, аналогичные вышеуказанным, можно наблюдать и при рассмотрении вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ .

Пусть  $I_a$  – центр вневписанной окружности  $\omega$ , касающейся стороны  $BC$ , касающейся стороны  $AB$  и продолжений  $BC$  и  $AB$  и  $AC$  (рис.17). Вот несколько фактов, которые мы предлагаем вам доказать самостоятельно:

- а)  $I_aK_1$  делит  $h_a$  пополам;
- б)  $I_aM_1$  отсекает на продолжении  $h_a$  за точку  $A$  отрезок  $AU$ , равный радиусу окружности  $\omega$ ;
- в)  $I_aM_1 \parallel AK_1$ ;
- г)  $I_aM_1$  делит отрезок  $AT_1$  пополам.

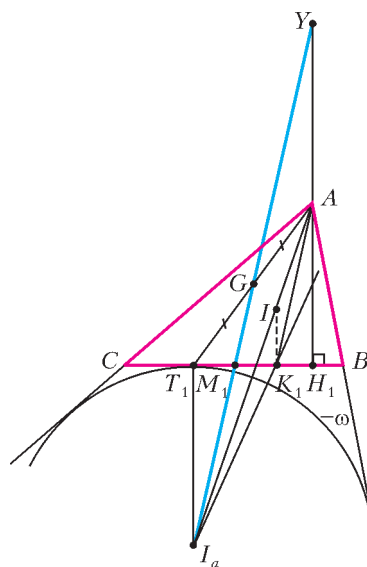


Рис. 17

# Квантовые чудеса

**М.КАГАНОВ**

**Введение**

В статье «Как квантовая механика описывает микромир» (см. «Квант» №2, 3 за 2006 г.) рассказывалось о фундаментальном уравнении квантовой механики – уравнении Шрёдингера – и с его помощью рассматривалась задача поведения частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. В предлагаемой вниманию читателей публикации главное вни-

мание будет уделено решению нескольких сравнительно простых задач, которые подобраны так, чтобы продемонстрировать необычность поведения микрочастиц по сравнению с макроскопическими телами. Из соображений простоты мы ограничимся только одномерными задачами.

Предлагаемые задачи, как правило, не могут претендовать на описание какого-то реального физического явления. Но они могут помочь понять реальные явления, достойные называться квантовыми чудесами.

**Частица или волна? Одна или много?**

Наибольшей психологической трудностью квантовой механики считается непредставимость основного объекта, для описания движения которого она создана. То частица проявляет свои волновые свойства, то корпускулярные. Математический аппарат квантовой механики устроен так, что, решая любую физическую задачу, можно пользоваться об-

щими приемами, позволяющими строго сформулировать математическую задачу, а для решения задачи нет необходимости *предполагать заранее*, какую черту поведения микроскопической частицы мы установим – волновую или корпускулярную. Решив задачу, мы *поймем*, как квантовая механика описывает движение частицы. Поймем, даже если не сможем себе представить.

В данной статье строгая постановка задачи означает возможность записать уравнение Шрёдингера, установить необходимые граничные и начальные условия. Решение поставленной задачи состоит не только в нахождении  $\Psi$ -функции, удовлетворяющей уравнению Шрёдингера с начальными и граничными условиями, но и в вычислении интересующих нас физических величин. Будут решаться только такие задачи, где  $\Psi$ -функция описывает движение *одной* частицы под действием силы, не зависящей от времени. Однако конкретные физические результаты, которые «содержатся» в  $\Psi$ -функции одной частицы и которые можно сравнивать с результатами эксперимента, относятся не к одной частице, а к ансамблю, коллективу во всем подобных частиц.

Что же описывает уравнение Шрёдингера: движение одной частицы или многих частиц? Одной! Но чтобы воспользоваться полученными результатами, их нужно перевести на язык макроскопической, классической физики. Именно для этого необходим переход к ансамблю многих частиц.

Переход из микромира в макромир не проходит «безнаказанно»: меняется описание причинной связи между событиями. В макромире властвует обычный механический детерминизм. Во всяком случае, когда речь идет о движении одной частицы под действием заданной силы. Зная начальные условия, мы можем проследить движение частицы во все последующие моменты. Уточним: пусть при  $t = 0$  известны координата  $x_0$  и скорость  $v_0$  частицы. Решив уравнение Ньютона (сила известна), мы найдем положение частицы в любой момент времени, т.е. функцию  $x = x(t)$ , равную  $x_0$  при  $t = 0$ . Производная  $dx(t)/dt$  есть скорость частицы  $v(t)$ . Естественно, когда  $t = 0$ , то  $v = v_0$ . Именно это утверждение и носит пышное название *механического детерминизма*.

Пусть не обманет вас слово «макромир». В макромире происходят разнообразные события, предсказать результаты которых абсолютно достоверно невозможно. Иногда это связано только с неполным знанием начальных условий. Классический пример – бросание кости. Если бы знать, но абсолютно точно(!), как бросить кубик, чтобы он выпал нужной гранью вверх, задача имела бы однозначное решение. А так надо довольствоваться оценкой вероятности того, что произойдет.

Бывает, и весьма часто, иначе: точно известна сила, приводящая макротело в движение, и известно, как будет двигаться тело под действием этой силы. Но если тело движется, например, в воздухе или скользит по наклонной плоскости, то на тело, кроме известной силы, действуют также силы со стороны молекул воздуха или атомов того тела, по которому оно скользит. Конечно, описать во всех подробностях движение тела и всех частиц (воздуха, наклонной плоскости) невозможно. Обычно достаточно ограничиться усредненным описанием влияния окружающей среды с помощью силы трения или сопротивления атмосферы. Учитывая силу трения (сопротивления), описывать движение макроскопического тела можно вполне надежно, но важные черты движения при этом существенно изменяются.

Так, часть энергии тела из-за трения необратимо теряется, превращаясь в тепло, – исчезает обратимость. Обратимость уравнений механики – формальное следствие того, что они

не изменяются при замене  $t$  на  $-t$ : ускорение – вторая производная от координаты – при замене  $t$  на  $-t$  не меняется. Сила же трения пропорциональна скорости тела – первой производной от координаты, которая при такой замене изменяется. Именно это обстоятельство и есть формальная причина потери обратимости.

В таком описании сил трения внимательный читатель ощутит непоследовательность. Каждая молекула воздуха или наклонной плоскости подчиняется тем же законам, что и само тело (сейчас речь не идет об изменениях, вносимых квантовой механикой). Почему же появляется необратимость? Это – весьма сложный вопрос. В основе ответа на него лежит явление диссипации, обусловленной переходом энергии от небольшого числа механических степеней свободы макроскопического тела к по сути бесконечному числу степеней свободы микроскопических частиц. Движение микрочастиц столь хаотично, что вероятность возвращения энергии обратно к телу равна нулю. По этому поводу говорят о необратимом запутывании, а более строгим языком – о росте *энтропии*, которая служит мерой беспорядка.

Вернемся к одной квантовой частице, движение которой описывается  $\Psi$ -функцией – решением уравнения Шрёдингера. Волновая функция – функция координат и времени. Задав начальное состояние, мы найдем вполне определенное решение  $\Psi = \Psi(x, t)$ . Казалось бы, вполне детерминированный процесс. Но, задав себе простейший вопрос о том, где находится частица в момент времени  $t$ , мы вынуждены ограничиться утверждением, что нам известна лишь вероятность нахождения частицы в интервале  $dx$  вокруг точки  $x$ , и вероятность эта равна  $|\Psi(x, t)|^2 dx$ . Подчеркнем: несомненно, речь идет об ансамбле частиц, а не об одной частице. Без ансамбля тождественных частиц понятие вероятности теряет смысл. И дело не в неполноте знаний или во взаимодействии с большим количеством иных частиц. Вероятность – первичное понятие квантовой механики. Строгое рассмотрение показало, что добиться большей точности предсказаний нельзя, нельзя избежать использования вероятности при описании движения микроскопических частиц.

Корпускулярно-волновой дуализм квантовых частиц не только делает их движение очень непохожим на движение классических тел, но заставляет рассматривать поведение ансамбля частиц даже тогда, когда, казалось бы, уравнение описывает движение одной частицы. В этом состоит еще одна психологическая трудность понимания квантовой механики.

### Траектория, стационарное состояние

Общее описание движения микроскопических частиц квантовой механикой убеждает нас: квантовые законы движения не похожи на классические. Но чтобы возникло ощущение чуда, появилось впечатление, что происходит нечто, чего «не может быть», необходимо рассмотреть примеры. Сделать наглядным отличие поведения квантовых микрочастиц от макроскопических тел можно, если четко представить движение классических макротел в условиях, точно совпадающих с условиями, в которых будет рассмотрено движение квантовых частиц. При описании движения классических тел и квантовых частиц мы постараемся использовать одинаковые термины – там, где это возможно.

В одномерном случае как-то неудобно говорить о *траектории*. Классическая частица в одномерном мире, конечно, *всегда* движется по прямой. Исчерпывающее описание движения частицы под действием внешней, не зависящей от времени силы  $F = F(x)$  сводится к определению зависимости координаты частицы от времени – к нахождению функции  $x = x(t)$ . Полная информация о движении частицы

содержится в этой функции. Скорость частицы равна  $v(t) = dx(t)/dt$ , импульс частицы (количество движения) есть  $p(t) = mv(t)$ .

Функция  $x(t)$  – решение уравнения Ньютона. Из уравнения Ньютона следует закон сохранения энергии

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const}, \text{ или } \epsilon = \frac{p^2}{2m} + U(x) = \text{const}. \quad (1)$$

Сила – производная, взятая с противоположным знаком, от потенциальной энергии:  $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ . Для понимания связи уравнения Ньютона с законом сохранения энергии продифференцируйте первое из указанных равенств по времени, помня, что координата  $x$  зависит от времени  $t$ , и немедленно получите уравнение Ньютона:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(x). \quad (1')$$

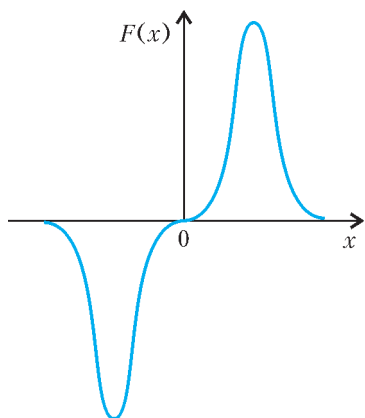
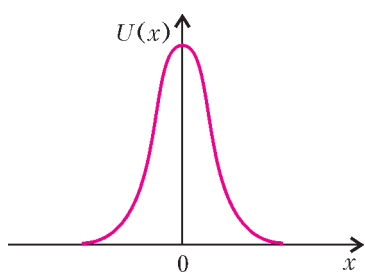


Рис. 1

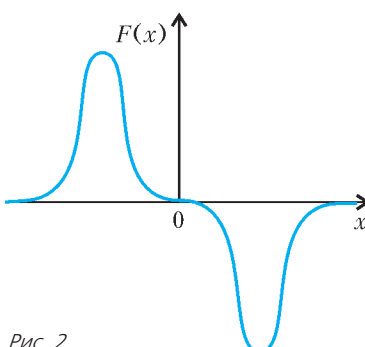
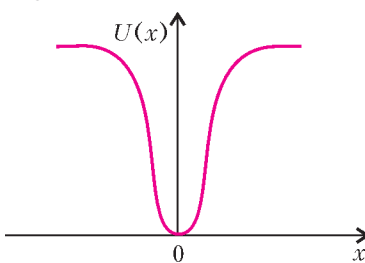


Рис. 2

Мы будем рассматривать потенциальную энергию либо в виде потенциального барьера (рис.1), либо в виде потенциальной ямы (рис.2). На рисунках 1 и 2 показано также, как выглядит сила, под действием которой ускоряется или замедляется частица.

Рисунок 3 изображает предельно упрощенный потенциальный барьер, а рисунок 4 – предельно упрощенную потенциальную яму. Это идеализация, конечно, но очень удобная для расчета. На всей оси  $x$ , кроме точек  $x = \pm d$ , сила равна нулю, а в точках  $x = \pm d$   $F = \pm\infty$ . Функция  $F(x)$ , равная нулю при всех значениях  $x$ , кроме  $x = 0$  равная бесконечности, это та самая дельта-функция Дирака, о которой говорилось в упомянутой ранее статье. Обозначается она так:  $\delta(x)$ . Таким образом, для прямоугольного барьера

$$F(x) = -U_0 \delta(x+d) + U_0 \delta(x-d), \quad (2)$$

$$\text{а для прямоугольной ямы } F(x) = U_0 \delta(x+d) - U_0 \delta(x-d). \quad (2')$$

Уточним определение  $\delta$ -функции: интеграл от  $\delta(x)$  по интервалу, содержащему точку  $x = 0$ , равен единице.

В тех задачах, которые

здесь обсуждаются, всегда и справа и слева с определенного расстояния до бесконечности потенциальная энергия есть ноль или константа. Уравнения (1) задают зависимость скорости  $v$  и импульса  $p$  от координаты  $x$ :

$$v = \sqrt{\frac{2(\epsilon - U(x))}{m}},$$

$$p = \sqrt{2m(\epsilon - U(x))},$$

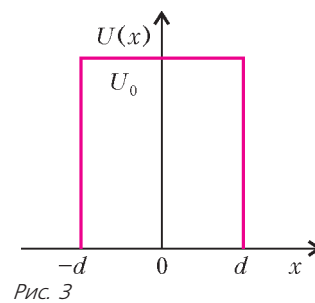


Рис. 3

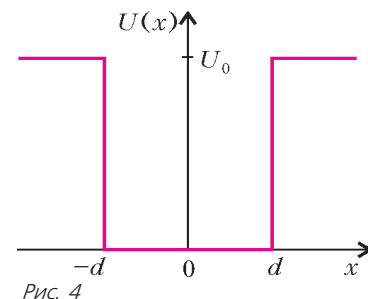


Рис. 4

а из рисунков 1 и 2 видно, что расстояние от точки с координатой  $x$  на кривой  $U = U(x)$  до прямой  $\epsilon = \text{const}$  по вертикали равно кинетической энергии макрочастицы. При заданной потенциальной энергии значение энергии  $\epsilon$  определяет характер движения. Так, согласно рисунку 1, частица с энергией, превышающей  $\max U(x) = U_0$ , движется беспрепятственно вдоль всей оси  $x$ , а частица с энергией  $\epsilon < U_0$  движется только по полуоси: либо справа от потенциального барьера, либо слева. В случае потенциальной ямы различие еще более разительно: если  $\epsilon > U_0$ , то частица совершает инфинитное движение, т.е. где бы частица ни начала свое движение, она уйдет на бесконечность. При  $\epsilon < U_0$  движение финитно: частица движется в пределах потенциальной ямы.

Зная, что предсказания квантовой механики могут быть проверены только в экспериментах с ансамблями частиц даже при рассмотрении движения одной частицы, выясним, как движение многих тождественных частиц описывается классической механикой.

Основными терминами для описания движения коллектива тождественных частиц служат плотность частиц  $n$  и плотность потока частиц  $j$ . Заметим, что плотность потока частиц – это вектор. В трехмерном пространстве размерность плотности частиц есть  $\text{см}^{-3}$ , а плотности потока частиц –  $\text{см}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$ . В одномерном случае  $n$  – это число частиц на единице длины, размерность  $n$  есть  $\text{см}^{-1}$ , а плотность потока частиц  $j = vn$  – это число частиц, проходящих через точку в единицу времени, размерность  $j$  есть  $\text{с}^{-1}$ .

И  $n$ , и  $j$  – функции  $x$  и  $t$ . Между  $n$  и  $j$  есть связь, называемая уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь использованы традиционные обозначения:  $\partial \dots / \partial t$  – производная по времени при постоянном значении координаты  $x$ , а  $\partial \dots / \partial x$  – производная по координате при постоянном значении времени  $t$ . Для вывода уравнения непрерывности надо вычислить изменение числа частиц на интервале  $dx$  за время  $dt$ , обязанное различию плотности потока на концах интервала (число частиц на интервале  $dx$  равно  $ndx$ , а за время  $dt$  через любую точку проходит  $jdt$  частиц). Уравнение непрерывности встречается всегда, когда плотность чего-либо изменяется в пространстве только за счет перемещения, а появление (рождение) или уничтожение (гибель) отсутствуют.

Уравнение непрерывности позволяет описать стационарное состояние. В классической механике, когда речь идет об одной частице, стационарное состояние как термин не упот-

ребляется. Если частица движется периодически, то говорят, что частица движется по стационарной траектории, подчеркивая, что траектория не изменяется со временем. Когда же речь идет об ансамбле тождественных частиц, стационарное состояние означает следующее. В понятие тождественности входят одинаковые начальные условия для всех частиц. Пусть в область, где на частицы действует сила, входит постоянный поток частиц плотностью  $j = j_0$  с одной и той же для всех частиц энергией  $\epsilon_0 = mv_0^2/2$ . Вся картина движения потока частиц не зависит от времени – осуществляется *стационарное состояние*: плотность потока не зависит от времени (произведение скорости  $v$  на плотность частиц  $n$ , равное плотности потока частиц  $j$ , не изменяется со временем). При этом скорость  $v$  зависит от координаты, как это следует из закона сохранения энергии, и, следовательно, плотность частиц зависит от координаты:  $n = n(x)$ . Там, где скорость больше, там плотность меньше, а где скорость меньше, там плотность больше, – это хорошо известный эффект (например, часто наблюдаемое скопление автомашин на участках замедленного движения). Стационарное состояние легко обобщается на поток частиц с различными энергиями. Если пренебречь столкновениями, то каждая группа частиц с одной и той же начальной скоростью подчиняется уравнению непрерывности, и каждая, независимо от других, движется так, как описано выше.

Чтобы в дальнейшем подчеркнуть отличие поведения квантовых частиц в сравнении с классическими, отметим несколько очевидных фактов.

Какова бы ни была форма или высота потенциального барьера, классическая частица с энергией, меньшей высоты барьера, под барьер проникнуть не может. От барьера она отразится и со скоростью, равной по величине, но направленной противоположно первоначальной скорости, двинется от барьера. Поток тождественных частиц поведет себя так же. Если плотность потока частиц к барьеру обозначить  $j_+$ , а плотность потока частиц от барьера обозначить  $j_-$ , то их отношение  $j_-/j_+$  есть коэффициент отражения. Обозначим его буквой  $R$ , тогда для классических частиц  $R = 1$ .

Каковы бы ни были форма и размер потенциальной ямы, если энергия частицы меньше потенциальной энергии вне ямы, классическая частица будет двигаться от одной стенки к другой и покинуть яму не сможет. Ничто не запрещает частице неподвижно лежать на дне ямы. Период движения частицы в яме зависит от ее энергии. В прямоугольной яме шириной  $2d$ , изображенной на рисунке 4, период равен 
$$T = \frac{4d}{\sqrt{2(\epsilon - U_0)/m}}.$$

Совсем очевидный и уже отмеченный выше факт: классическая частица с энергией  $\epsilon > U(x)$  при любом значении координаты  $x$  движется свободно со скоростью, зависящей от координаты. Плотность потока частиц  $j$  при этом неизменна. Наконец, энергия классической частицы может иметь любое значение. Есть единственное ограничение: полная энергия  $\epsilon$  должна быть больше или равна потенциальной энергии  $U(x)$ . Иначе: энергетический спектр классической частицы непрерывен.

#### Уравнение Шрёдингера. Плотность потока...

Как Шрёдингер сформулировал уравнение, носящее теперь его имя, довольно подробно рассказано в упомянутой выше статье. Не повторяя сказанного, напомним только, что введение  $\Psi$ -функции послужило основой создания волновой механики. Сначала квантовую теорию в шрёдингеровском варианте называли именно *волновой механикой*, подчеркивая волновые свойства атомных и субатомных частиц.

Действительно, иногда понять квантовое явление легче, сравнивая движение квантовой частицы не с движением классической частицы, а с распространением волны, например электромагнитной.

Выпишем уравнение Шрёдингера для одномерного случая. Множественное число (уравнения) использовано потому, что мы выпишем два уравнения: нестационарное и стационарное. *Нестационарная* волновая функция в одномерном случае зависит от двух переменных – от координаты и от времени:  $\Psi = \Psi(x, t)$ , а *стационарная* волновая функция, тоже обозначаемая буквой  $\Psi$ , но меньших размеров, зависит только от координаты:  $\psi = \psi(x)$ . Для состояния частицы, энергия которой имеет определенное значение, стационарная волновая функция  $\psi(x)$  – это амплитуда в выражении для нестационарной волновой функции:

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i\epsilon t}{\hbar}\right)\psi(x). \quad (4)$$

Итак, в одномерном случае нестационарное уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x) \Psi \right), \quad (5)$$

а стационарное уравнение –

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (\epsilon - U(x)) \psi = 0. \quad (6)$$

Эти дифференциальные уравнения должны быть дополнены граничными и начальными условиями, но об этом позже.

В цитированной статье (и, конечно, не только в ней) сказано, что выражение  $\Psi\Psi^* dx$ , где звездочка \* обозначает комплексное сопряжение, есть вероятность обнаружить частицу в точке  $x$  при многократном осуществлении эксперимента, в котором частица движется так, как описывает  $\Psi$ -функция. Следовательно,  $\rho(x, t) = \Psi\Psi^* = |\Psi(x, t)|^2$  есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Если  $\rho(x, t) \neq 0$  в небольшой области пространства, то напрашивается зрительный образ – *облако вероятности*. Несомненно, интересно и важно знать, как оно движется, каков его закон движения.

Вывести уравнение, описывающее изменение плотности вероятности  $\rho(x, t)$ , нетрудно. Для этого используются уравнение (5) для  $\Psi$  и аналогичное уравнение для  $\Psi^*$ . После соответствующих преобразований получится

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad j = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Мы получили уравнение непрерывности. Естественно, здесь  $j$  – плотность потока. Но потока чего? Так как  $\rho$  – плотность вероятности, то  $j$  – *плотность потока вероятности*.

Удивительное дело: величины, с помощью которых можно только оценить вероятность того, попадет ли частица в данную точку пространства ( $\rho$  и  $j$ ), с ходом времени изменяются в пространстве так, будто описывают движение газа частиц. Уравнение непрерывности показывает, что при движении вероятность не рождается и не исчезает, а только перемещается в пространстве. Если начальное состояние частицы таково, что она с достоверностью находится в какой-то области пространства, то с ходом времени может измениться область, где частицу можно обнаружить, но по-прежнему во всей доступной области частица с достоверностью находится.

Уравнение непрерывности (7) описывает закон сохранения частицы.

(Продолжение следует)

# Пропорциональность дифференциалов в физических задачах

**К.РЫБ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ** процессов часто приводит к дифференциальным уравнениям, связывающим между собой переменные величины и их производные. Решение подобных уравнений представляет математическую трудность для учащихся. Однако возможно применение обходного пути, не требующего владения методами интегрирования дифференциальных уравнений.

Так, если при моделировании какого-либо физического процесса устанавливается пропорциональная взаимосвязь двух изменяющихся физических величин, то можно говорить о пропорциональности их дифференциалов. При этом появляется возможность свести решение к конечным приращениям взаимосвязанных величин на основе пропорции. Суммируя бесконечно малые в полученном выражении, которое мы будем называть *пропорциональностью дифференциалов*, и вынося коэффициент за знак суммирования, получим связь между конечными изменениями величин. Если изменение одной из величин в ходе процесса задано условием задачи, то полученное выражение однозначно определит изменение и второй величины.

А теперь – несколько конкретных задач.

**Задача 1.** Модели корабля массой  $m$  сообщают некоторую начальную скорость  $v_0$ . Сила сопротивления воды пропорциональна скорости:  $F_c = -kv$ . Какое расстояние пройдет модель до места, где ее скорость уменьшится вдвое? Каково общее расстояние, которое пройдет модель?

Сила сопротивления определяет быстроту убыли скорости. С учетом условия и второго закона Ньютона запишем

$$F_c = -kv, \quad F_c = m \frac{dv}{dt},$$

или

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Умножим полученное уравнение на  $dt$  и учтем, что  $vdt = ds$ , где  $s$  – пройденное расстояние. При этом получим

$$ds = -\frac{m}{k} dv.$$

Два дифференциала связаны постоянным коэффициентом, который при суммировании можно вынести, и мы найдем связь между конечными приращениями:

$$\Delta s = -\frac{m}{k} \Delta v.$$

Так как по условию в первом случае  $\Delta v_1 = -\frac{v_0}{2}$  и  $\Delta s = s_1$ , то

$$s_1 = \frac{mv_0}{2k}.$$

Аналогично получаем ответ для второго случая:

$$s_2 = \frac{mv_0}{k}.$$

Попробуйте решить задачу разделением переменных и интегрированием и сравните трудоемкости двух способов решения.

**Задача 2.** По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми  $L$ , скользит без трения перемычка массой  $m$ . Рельсы соединены резистором сопротивлением  $R$  и находятся в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией  $B$ . Перемычке сообщают скорость  $v_0$ . Какое расстояние она пройдет до остановки?

ЭДС индукции в движущейся со скоростью  $v$  перемычке создает индукционный ток:

$$e_i = BLv, \quad i = \frac{e_i}{R} = \frac{BLv}{R}.$$

Сила Ампера, действующая на проводник с током, тормозит движение перемычки:

$$F_A = iBL \sin \alpha, \quad F_A = -m \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, в нашем случае ( $\alpha = 90^\circ$ ) получаем

$$-m \frac{dv}{dt} = \frac{B^2 L^2}{R} v.$$

В этом уравнении мы видим признак экспоненциальной убыли скорости: быстрота уменьшения скорости пропорциональна самой скорости. Это – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Но мы не будем его интегрировать (по методу разделения переменных), а сделаем следующее.

Умножим наше уравнение на  $dt$  и учтем, что  $vdt = ds$ , где  $s$  – пройденное расстояние. Тогда

$$ds = -\frac{mR}{B^2 L^2} dv.$$

Получили пропорциональность дифференциалов. Суммирование позволит перейти к конечным приращениям:

$$\Delta s = -\frac{mR}{B^2 L^2} \Delta v,$$

и, поскольку  $\Delta v_{\text{общ}} = -v_0$ , перемещение до остановки будет равно

$$s_{\text{общ}} = \frac{mRv_0}{B^2 L^2}.$$

**Задача 3.** Цепочку массой  $m$  и длиной  $l$  подвесили за два конца к потолку. При этом оказалось, что в местах закрепления цепочка образует углы  $\alpha$  с вертикалью. Найдите расстояние  $H_0$  от нижней точки цепочки до потолка.

Пусть сила натяжения в нижней точке цепочки  $T_O$ , а в точке подвеса  $T_A$  (рис.1). К половине цепочки еще приложе-

на сила тяжести  $\frac{mg}{2}$ .

Запишем условие равновесия сил, действующих на половину цепочки, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$T_O - T_A \sin \alpha = 0,$$

$$T_A \cos \alpha - \frac{mg}{2} = 0.$$

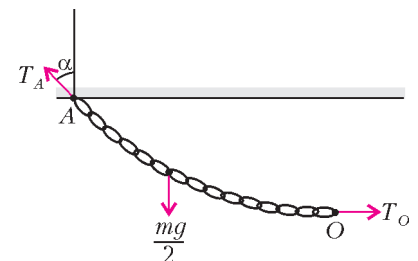


Рис. 1

Отсюда

$$T_A = \frac{mg}{2 \cos \alpha} \text{ и } T_O = \frac{mg}{2} \operatorname{tg} \alpha .$$

Для любого промежуточного звена цепочки, образующего с вертикалью угол  $\varphi$ , который меняется от  $90^\circ$  вблизи точки  $O$  до  $\alpha$  вблизи точки  $A$ , можно записать условие равновесия для проекций сил на направление звена. Пусть длина звена  $dl$ , тогда его сила тяжести равна  $dP = \frac{mg}{l} dl$ . Прирост силы натяжения на элементе звена равен  $dT = \frac{mg}{l} dl \cos \varphi$ . Обратим внимание на то, что  $dl \cos \varphi = dh$  определяет прирост высоты на элементе звена. Тогда

$$dT = \frac{mg}{l} dh .$$

Мы получили связь между приростом высоты и приростом модуля силы натяжения в виде пропорциональности дифференциалов. Суммируя, получаем  $\sum dh = H_0$  – высоту провиса и  $\sum dT = T_A - T_O$  – разность модулей сил натяжения. Таким образом,

$$T_A - T_O = \frac{mg}{l} H_0 ,$$

или

$$\frac{mg}{2} \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{mg}{l} H_0 .$$

Отсюда находим

$$H_0 = \frac{l(1 - \sin \alpha)}{2 \cos \alpha} .$$

*Примечание.* Существует энергетический метод решения этой задачи. Разумеется, он приводит к тому же результату. Убедитесь в этом самостоятельно.

**Задача 4.** В неоднородном магнитном поле с индукцией  $B = \alpha x$  ( $x > 0$ ) стартует частица массой  $m$  и зарядом  $q$  с начальной скоростью  $v_0$ , направленной вдоль оси  $X$  (рис.2). Определите максимальное смещение частицы вдоль оси  $X$ .

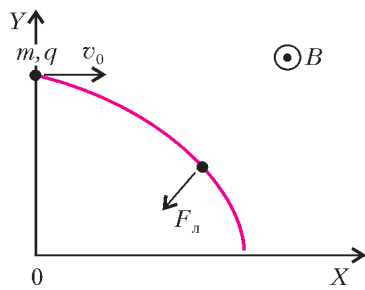


Рис. 2

Со стороны магнитного поля на частицу будет действовать сила Лоренца. Она перпендикулярна скорости и меняет только ее направление. Однако в неоднородном поле скорость будет нарастать, что вызовет уменьшение радиуса кривизны траектории, поэтому траектория частицы не будет дугой окружности.

Заметим, что проекция силы Лоренца на ось  $Y$  меняет соответствующую составляющую скорости частицы:

$$F_{Ly} = m \frac{dv_y}{dt} .$$

Но эта проекция силы зависит от перпендикулярной к ней составляющей скорости частицы  $v_x$ :

$$F_{Ly} = qB(x)v_x .$$

Отсюда получаем

$$m \frac{dv_y}{dt} = qB(x)v_x .$$

Умножая на приращение времени, находим

$$mdv_y = qB(x) dx .$$

Поскольку  $B(x) = \alpha x$ , то

$$dv_y = \frac{q\alpha}{m} x dx , \text{ или } dv_y = \frac{\alpha q}{m} d\left(\frac{x^2}{2}\right) .$$

Мы получили пропорциональность дифференциалов. Смещение частицы вдоль оси  $X$  достигнет максимума, когда проекция скорости частицы на эту ось уменьшится до нуля. Тогда проекция скорости частицы на ось  $Y$  достигнет значения модуля скорости. Для этого случая

$$\sum dv_y = v_0 , \text{ и } v_0 = \frac{\alpha q}{m} \frac{x_{\max}^2}{2} .$$

Отсюда находим искомое смещение частицы:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2v_0 m}{\alpha q}} .$$

**Задача 5.** Две частицы с одинаковыми массами  $m$  и зарядами  $q$ , равными по модулю, но противоположными по знаку, помещены в однородное магнитное поле, индукция которого  $B$  перпендикулярна отрезку  $R$ , соединяющему заряды. Найдите расстояние между частицами в момент наибольшего сближения, если их стартовые скорости нулевые. Индукция магнитного поля достаточна для предотвращения столкновения.

Пусть ось  $X$  направлена по линии, соединяющей заряды. Вдоль этой оси действуют силы кулоновского притяжения, разгоняющие частицы. Прирост кинетической энергии частиц определяется убылью потенциальной энергии кулоновского притяжения:

$$2 \frac{mv^2}{2} = -kq^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) ,$$

откуда

$$v = q \sqrt{\frac{k}{m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)} .$$

Сила Лоренца, перпендикулярная скорости, изменяет ее направление. Проекция ускорения частиц на ось  $Y$  обусловлена соответствующей проекцией силы Лоренца:

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_{Ly} , \text{ или } m \frac{dv_y}{dt} = qBv_x .$$

Умножая на приращение времени, получим

$$dv_y = \frac{qB}{m} dx$$

– между изменением проекции скорости и сближением частиц зависимость пропорциональная. Для конечных приращений учтем следующее. Частицы не столкнутся, если успеют выйти на параллельные курсы вдоль оси  $Y$  при  $R - r > 0$ . Конечные приращения для этого условия равны

$$\sum dv_y = v \text{ и } \sum dx = \frac{R - r}{2} > 0 . \text{ Тогда}$$

$$v = \frac{qB}{2m} (R - r) .$$

С учетом найденного ранее выражения для скорости  $v$ , получим зависимость минимального сближения частиц  $r$  от начального расстояния и индукции магнитного поля. Действительно,

$$\frac{q^2 B^2 (R - r)^2}{4m^2} = \frac{q^2 k (R - r)}{mRr} ,$$



сократим и приведем к квадратному уравнению, подставив  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ :

$$r^2 - Rr + \frac{m}{\pi\epsilon_0 B^2 R} = 0, \text{ и } r = \frac{R}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 R^3}} \right).$$

Положительный дискриминант определяет значение индукции магнитного поля, предотвращающее столкновение частиц. При этом для  $r$  выбирается больший корень, так как при достижении этого расстояния сближение частиц прекращается. Магнитная и кулоновская силы, действующие на частицу, компенсируются. Окончательно получим

$$r = \frac{R}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 R^3}} \right).$$

**Задача 6.** В схеме на рисунке 3 замыкают вначале ключ  $K_1$ , а после установления стационарного режима замыкают ключ  $K_2$ . Какой заряд протечет через резистор сопротивлением  $R$  после замыкания ключа  $K_2$ ? Величины  $R, r, \epsilon, L_1, L_2$  считать заданными.

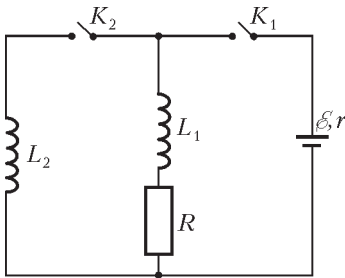


Рис. 3

После замыкания ключа  $K_1$  ток стационарного режима будет равен  $I_1 = \frac{\epsilon}{R+r}$ . После замыкания ключа  $K_2$  катушка индуктивностью  $L_2$  будет осуществлять шунтирующее действие, так как она обладает пренебрежимо малым активным сопротивлением. В ней установится ток короткого замыкания  $I_2 = \frac{\epsilon}{r}$ , а ток в первой катушке уменьшится до нуля.

По второму правилу Кирхгофа для контура из двух катушек,  $e_2 + e_1 = i_1 R$ . Но  $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt}$  и  $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$ . Тогда

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} = i_1 R.$$

Отметим, что убыль тока  $i_1$  дает отрицательную производную. Умножим полученное равенство на  $dt$  и заметим, что  $i_1 dt = dq, \frac{di_2}{dt} dt = di_2, \frac{di_1}{dt} dt = di_1$ . Получим

$$-\frac{1}{R} (L_2 di_2 + L_1 |di_1|) = dq.$$

Учитывая общие изменения токов в процессах и переходя к конечным приращениям, найдем искомый заряд:

$$q_{\text{общ}} = \frac{\epsilon}{R} \left( \frac{L_2}{r} + \frac{L_1}{R+r} \right).$$

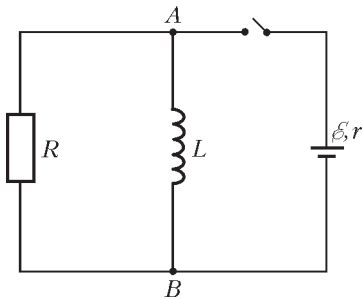


Рис. 4

**Задача 7.** Параллельно соединенные катушка индуктивностью  $L$  и резистор сопротивлением  $R$  подключены через ключ к батарее с ЭДС  $\epsilon$  и внутренним сопротивлением  $r$  (рис.4). Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь.

В момент замыкания ключа через резистор течет ток  $I_0 = \frac{\epsilon}{R+r}$ , а ток в катушке равен нулю. В последующее время ток через катушку будет нарастать до значения тока короткого замыкания  $I_k = \frac{\epsilon}{r}$ . При этом напряжение между точками  $A$  и  $B$  схемы будет убывать до нуля.

Для какого-либо момента времени переходного периода выполняется равенство

$$-L \frac{di_2}{dt} = i_1 R.$$

Умножая на  $dt$ , получим пропорциональность дифференциалов:

$$-L di_2 = R dq.$$

Суммируя, перейдем к конечным приращениям:

$$\frac{L}{R} \Delta i_2 = \Delta q.$$

Очевидно, что ток через катушку перестанет меняться, когда ЭДС самоиндукции в ней станет нулевой, а значит, ток через резистор прекратится. Тогда получим  $\Delta i_2 = \frac{\epsilon}{r}$ , и

$$q_R = \frac{L\epsilon}{Rr}.$$

**Задача 8.** Тело брошено под углом к горизонту с высокого обрыва из точки  $O$  (рис.5). Из-за сопротивления воздуха разность времени подъема тела до наибольшей высоты и времени возврата на прежний уровень в точку  $A$  составляет  $\tau$ . В точке  $A$  вертикальная составляющая скорости на  $\Delta v$  меньше вертикальной составляющей скорости в точке старта, а горизонтальная составляющая равна  $v_{Ax}$ . На какую высоту от линии горизонта  $OA$  поднялось тело, если наибольшее удаление его по горизонтали от точки  $A$  за все время полета составило  $\Delta L_0$ ? Сила сопротивления движению тела в воздухе прямо пропорциональна его скорости.

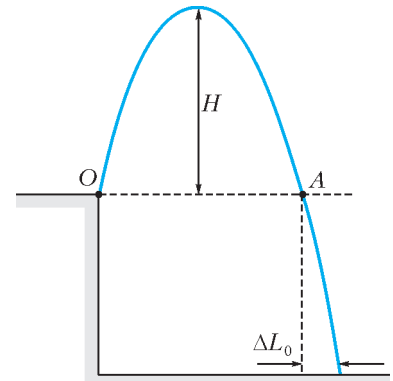


Рис. 5

Горизонтальная составляющая скорости в точке  $A$  равна  $v_{Ax}$ , а максимальное горизонтальное смещение после прохождения точки  $A$  составляет  $\Delta L_0$ . Значит, эта скорость гасится полностью силой сопротивления воздуха. Запишем уравнение динамики в проекции на горизонтальную ось:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x,$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью. Умножая на приращение времени  $dt$ , получаем пропорциональность дифференциалов:

$$mdv_x = -kdx, \text{ или } -\frac{m}{k} dv_x = dx.$$

Суммируя, перейдем к конечным приращениям:

$$\frac{m}{k} v_{Ax} = \Delta L_0, \text{ или } \frac{m}{k} = \frac{\Delta L_0}{v_{Ax}}.$$

Теперь запишем уравнения динамики в проекции на вертикальную ось для движения тела вверх и вниз:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y + mg.$$

Умножим на приращение времени и получим для движения вверх и для движения вниз, соответственно,

$$mdv_y = -kdy - mgdt,$$

$$mdv_y = -kdy + mgdt.$$

Для всего пути запишем

$$-mv_{Oy} = -kH - mgt_1, \quad mv_{Ay} = -kH + mgt_2.$$

Складывая эти уравнения получим

$$-m\Delta v = -2kH + mg\tau.$$

Отсюда найдем искомую величину:

$$H = \frac{m}{k} \frac{\Delta v + g\tau}{2} = \frac{\Delta L_0}{v_{Ax}} \frac{\Delta v + g\tau}{2}.$$

**Задача 9\*.** В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится воздушный пузырек. При вертикальном положении трубки пузырек поднимается со скоростью 1 м/с. Трубку расположили горизонтально и разогнали вдоль длинной стороны до скорости 20 м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с?

Рассмотрим сначала вертикальный подъем пузырька. Для установившегося режима при условии малости массы пузырька архимедова сила компенсируется силой сопротивления глицерина:

$$\bar{F}_A + \bar{F}_c = 0, \quad \text{или} \quad \rho_{ж} V g = kv_0,$$

где  $\rho_{ж}$  – плотность жидкости (глицерина),  $k$  – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью (будем считать, что при данных скоростях сила сопро-

тивления со стороны жидкости прямо пропорциональна скорости пузырька),  $v_0 = 1$  м/с.

При горизонтальном ускоренном движении трубки на жидкость действуют силы инерции, создавая «искусственную тяжесть». На элемент жидкости массой  $m$  действует сила инерции  $-m\ddot{a}$ , направленная против ускорения. Поле сил инерции создает составляющую архимедовой силы, направленную по ускорению трубки и равную

$$F_A = \rho_{ж} V a = \rho_{ж} V \frac{dv}{dt}.$$

Это приведет пузырек в движение. Из-за пренебрежимой массы пузырька можно записать

$$\bar{F}_A + \bar{F}_c = 0, \quad \text{или} \quad \rho_{ж} V \frac{dv}{dt} = kv.$$

Умножим на  $dt$  и получим пропорциональность дифференциалов:

$$\rho_{ж} V dv = kdx.$$

Суммируя и уточняя конечные приращения, для первого случая, когда трубку разгоняют до скорости  $v_1 = 20$  м/с, запишем

$$\frac{\rho_{ж} V}{k} v_1 = x_1.$$

С учетом уравнения для вертикального подъема пузырька найдем

$$x_1 = \frac{v_0 v_1}{g} = 2 \text{ м}.$$

Аналогично, для второго случая, когда скорость трубки увеличивают до  $v_2 = 30$  м/с, получим

$$x_2 = \frac{v_0 v_2}{g} = 3 \text{ м}.$$

Видно, что смещение пузырька пропорционально скорости трубки.

*Замечание.* Решите самостоятельно эту задачу без использования силы инерции.

# Множество значений функции

**С. ЛАВРЕНОВ**

Часто, решая задачи, абитуриент (или школьник, сдающий ЕГЭ) сталкивается с необходимостью отыскания области значений той или иной функции. Напомним, что если на некотором множестве  $D[f] \subset \mathbf{R}$  задана функция  $y = f(x)$ ,  $y \in \mathbf{R}$ , то множеством значений  $E[f]$  этой функции называется множество всех таких  $y \in \mathbf{R}$ , что  $y = f(x)$  при некотором  $x \in D[f]$ .

Цель этой статьи – представить различные методы нахождения множества значений функции. Для демонстрации эффективности рассматриваемых методов некоторые задачи и упражнения повторяются в статье несколько раз. Номера таких задач и упражнений сохраняются.

Начнем с несложных примеров.

**Задача 1.** Найдите множество значений функции  $y = \sin x + \cos x$ .

**Решение.** Воспользуемся способом введения вспомогательного угла:

$$y = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Ответ:  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .

**Задача 2.** Найдите множество значений функции  $y = \cos^2 x + \sqrt{2} \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right)$ .

**Решение.** Преобразуя данное выражение и вводя вспомогательный угол  $\varphi$ , получим

$$y = \frac{1}{2} + \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2x - \varphi).$$

Ответ:  $\left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$ .

**Упражнение 1.** Найдите все значения  $a$ , при которых множество значений функции  $y = ax^2 + x + 1$  включает отрезок  $[-1; 1]$ .

**Разрешимость уравнения  $f(x) = a$**

Отыскание множества значений функции тесно связано с решением уравнений.

**Теорема 1.** Уравнение  $f(x) = a$  имеет решение тогда и только тогда, когда  $a$  принадлежит области значений функции  $y = f(x)$ .

Доказательство следует непосредственно из определения множества  $E[f]$ .

Из теоремы 1 следует, что для отыскания  $E[f]$  достаточно найти все значения  $a$ , для которых уравнение  $f(x) = a$  имеет корень  $x \in [f]$ . Множество таких  $a$  и является множеством  $E[f]$ .

**Задача 3.** Найдите множество значений функции  $y = \sqrt{15 + 2x - x^2}$ .

**Решение.** Выясним, при каких значениях  $a$  уравнение  $\sqrt{15 + 2x - x^2} = a$  имеет решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 15 + 2x - x^2 = a^2, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет решение при  $D/4 = 16 - a^2 \geq 0$ , поэтому  $0 \leq a \leq 4$ .

Ответ:  $[0; 4]$ .

Иногда абитуриенты присоединяют к системе неравенство  $15 + 2x - x^2 \geq 0$ . Однако этого делать не нужно, так как оно вытекает из первого уравнения системы.

**Задача 4.** Найдите множество значений функции  $y = \frac{\sqrt{3} \cos x + 1}{3 + \sin x}$ .

**Решение.** Уравнение  $\frac{\sqrt{3} \cos x + 1}{3 + \sin x} = a$  равносильно уравнению  $\sqrt{3} \cos x - a \sin x = 3a - 1$ , т.е.

$$\cos(x + \varphi) = \frac{3a - 1}{\sqrt{3 + a^2}},$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$\frac{(3a - 1)^2}{3 + a^2} \leq 1, \text{ т.е. при } a \in [-1/4; 1].$$

Ответ:  $[-1/4; 1]$ .

*Замечание.* Мы воспользовались введением вспомогательного угла. Явно разрешать уравнение относительно  $x$  мы не стали, так как этого от нас не требовалось. Достаточно определить условия существования решения, что и было сделано.

**Упражнения**

Найдите множество значений функции:

2.  $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ .

3.  $y = \frac{2 - \cos x}{4 + \sqrt{3} \sin x}$ .

Рассмотренный метод применим и для функций нескольких переменных, на которые наложены дополнительные ограничения. Рассмотрим для определенности функцию двух переменных. Постановка задачи обычно такова: найти множество значений функции  $z = f(x, y)$  при ограничении  $g(x, y) = 0$  (или  $g(x, y) \leq 0$ ). В таких задачах требуется найти значения параметра  $a$ , при которых имеет решение система

$$\begin{cases} f(x, y) = a, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

**Задача 5.** Числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенству  $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12$ . Найдите все значения, которые может принимать сумма  $x^2 + y^2$ .

**Решение.** Найдём все значения  $a$ , при которых имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ 7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 12, второе на  $a$  и вычтем одно из другого. Получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} (7a - 12)x^2 - 4axy + (4a - 12)y^2 = 0, \\ 7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12. \end{cases}$$

Если  $y = 0$ , то получим  $a = 12/7$ ,  $x = \pm\sqrt{12/7}$ . Пусть  $y \neq 0$ . Поделим первое уравнение на  $y^2$  и положим  $t = x/y$ . Тогда  $(7a - 12)t^2 - 4at + 4a - 12 = 0$ . При  $a = 12/7$  коэффициент перед  $t^2$  обращается в 0, но при этом значении система имеет решение. Если  $a \neq 12/7$ , то уравнение имеет решение, если  $D/4 = -24a^2 + 132a - 144 \geq 0$ . Отсюда  $a \in [3/2; 4]$ . При этом  $12/7 \in [3/2; 4]$ . Итак,  $x = ty$  при найденных  $a$ . Подставляя это выражение во второе уравнение, получим  $y^2(7t^2 - 4t + 4) = 12$ . Квадратный трехчлен, стоящий в скобках, положителен, поэтому существует  $y$ , а следовательно, существует и  $x$ .

Ответ:  $[3/2; 4]$ .

*Замечание.* Проверка существования  $x$  и  $y$  обязательна. Если немного изменить исходную задачу, положив в правой части ограничения число  $-12$ , то мы получим  $a \in [-4; -3/2]$ . Но множество значений в такой постановке задачи оказывается пустым.

**Упражнение 4.** Найдите множество значений функции  $z = x^2 + 2y^2$ , если  $x^2 - xy + 2y^2 = 1$ .

**Объединение образов промежутков монотонности. Экстремумы**

Далеко не для всех функций мы сможем решить уравнение  $f(x) = a$ . Вот пример:  $y = (1 - x)e^{-x}$ . Здесь может помочь исследование функции с помощью производной.

Но сначала придется ввести новые определения.

*Сужением* функции  $y = f(x)$  на множество  $A \subset D[f]$  называется функция  $y = f(x)$ , для которой  $x \in A$ . Обозначение:  $y = f(x)|_A$ . Подчеркнем, что сужение функции – это уже другая функция. У нее имеется свое множество значений  $E[f|_A] = \{y \in \mathbf{R} | x \in A \subseteq D[f] \text{ и } y = f(x)\}$ . Оно является образом функции  $f(x)$  на множестве  $A$ .

**Теорема 2.** Пусть  $y = f(x)$  непрерывна и монотонна на

отрезке  $[a; b]$ . Тогда если  $f(x)$  возрастает на  $[a; b]$ , то  $E[f|_{[a;b]}] = [f(a); f(b)]$ . Если  $f(x)$  убывает на  $[a; b]$ , то  $E[f|_{[a;b]}] = [f(b); f(a)]$ .

Теорему иллюстрируют рисунки 1 и 2.

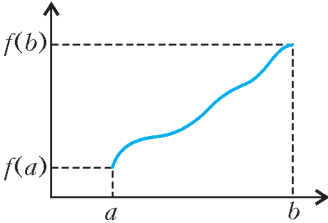


Рис. 1

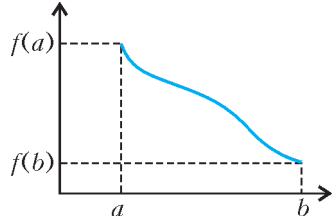


Рис. 2

Отрезок  $[a; b]$  можно заменить промежутками других типов: интервалами, лучами. Формулировка теоремы изменится. Например, если  $f(x)$  возрастает на  $[a; +\infty)$ , то  $E[f|_{[a;+\infty)}] = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$ .

Потренируемся. Вычислим образ отрезка  $[1; 4]$  для функции  $y = \log_{1/2} x$ . Эта функция является убывающей. Значения в граничных точках отрезка равны 0 и  $-2$ . Поэтому  $\log_{1/2} x|_{[1;4]} = [\log_{1/2} 4; \log_{1/2} 1] = [-2; 0]$ . Покажите это на графике.

А теперь используем это для вычисления  $E[f]$ . Представим область определения  $D[f]$  в виде объединения промежутков монотонности  $D_k$ . Для каждого такого промежутка вычислим его образ  $E_k = E[f|_{D_k}]$ . Тогда  $E[f] = \cup E_k$ .

**Задача 6.** Найдите множество значений функции  $y = (1-x)e^{-x}$ .

**Решение.** Найдем промежутки монотонности. Поскольку  $y' = (x-2)e^{-x}$ , то при  $x \in (-\infty; 2]$  функция убывает, а при  $x \in [2; +\infty)$  — возрастает, т.е.  $x=2$  — точка минимума, так что  $y_{\min} = y(2) = -e^{-2}$ . Далее,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)}{e^x} = 0.$$

Поэтому  $E_1 = E[y|_{(-\infty; 2]}] = [-e^{-2}; +\infty)$ ,  $E_2 = E[y|_{[2; +\infty)}] = [-e^{-2}; 0)$ . Тогда  $E = E_1 \cup E_2 = [-e^{-2}; +\infty)$ . Нарисуйте эскиз графика функции.

**Теорема 3.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то  $E[f] = [\min_{x \in [a;b]} f(x); \max_{x \in [a;b]} f(x)]$ .

Для отыскания множества значений нужно вычислить наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке. Эти значения задают границы множества значений. Поиск наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке проводится по известной схеме. Вычисляются значения функции в критических точках (точках, в которых производная функции обращается в ноль или не существует), а также в граничных точках отрезка. Из этих значений выбираются минимальное и максимальное.

Для периодических функций достаточно вычислить значения функции в критических точках.

**Задача 7.** Найдите множество значений функции  $f(x) = 10 \sin 2x + \cos x$ .

**Решение.** Поскольку

$$f'(x) = 20 \cos 2x - 7 \sin x = -40 \sin^2 x - 7 \sin x + 20 = 0,$$

то имеются две возможности:

$$1) \sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 20 \left(-\frac{4}{5}\right) \left(\pm \frac{3}{5}\right) + 7 \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \mp \frac{48}{5} \pm \frac{21}{5} = \pm \frac{27}{5};$$

$$2) \sin x = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{39}}{8} \Rightarrow f(x) = \pm \frac{39}{16} \sqrt{39}.$$

Заметив, что  $\frac{39\sqrt{39}}{16} > \frac{27}{5}$ , получаем ответ.

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{39}{16} \sqrt{39}; \frac{39}{16} \sqrt{39}\right].$$

**Упражнения**

Найдите множество значений функции:

5.  $y = (1 + \cos x) \sin x$ .

6.  $y = 8\sqrt{3} \cos^3 x + 18 \sin x$ .

7.  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}{2|x| + 1}$ .

**Представление в виде композиции функций**

Нахождение множества значений существенно упрощается, если удастся представить исследуемую функцию в виде композиции других функций:  $y = f(x) = g(h(x))$ . Тогда  $E[f]$  является образом функции  $g(z)$  на множестве  $D[g] \cap E[h]$ , т.е.  $E[f] = E[g|_{D[g] \cap E[h]}]$ .

**Задача 8.** Найдите множество значений функции  $y = \log_{1/2}(2x - x^2 + 3)$ .

**Решение.** Для функции  $z = h(x) = 2x - x^2 + 3 = 4 - (x - 1)^2$  имеем  $E[h] = (-\infty; 4]$ ; для функции  $y = g(z) = \log_{1/2} z$  имеем  $D[g] = (0; +\infty)$ . Получим  $D[g] \cap E[h] = (0; 4]$ , значит,  $E[f] = [-2; +\infty)$ .

Эти формулы приобретают наглядность при использовании графиков. На рисунке 3 изображен график функции  $z = h(x)$ , множество значений выделено жирно. Повер-

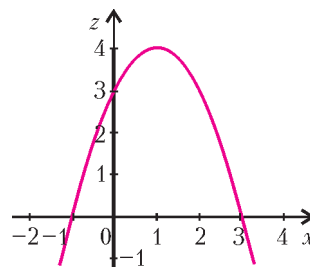


Рис. 3

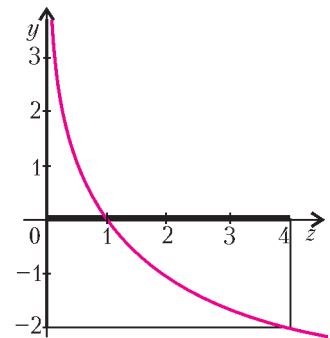


Рис. 4

нем ось  $z$  из вертикального положения в горизонтальное и поместим ее на рисунке 4, где показан график  $y = g(z)$  и выделена область определения этой функции. Видно, что образом промежутка  $(0; 4]$  является луч  $[-2; +\infty)$ .

Для сравнения решите эту задачу первым и вторым методами.

Давайте теперь еще раз решим задачу 3. Функция  $y = \sqrt{15 + 2x - x^2} = f(x)$  представляется в виде  $f(x) = g(h(x))$ , где  $y = g(z) = \sqrt{z}$ ,  $z = h(x) = -x^2 + 2x + 15 = 16 - (x - 1)^2$ . Далее,  $E[h] = (-\infty; 16]$ ;  $D[g] = [0; +\infty)$ ;  $E[h] \cap D[g] = [0; 16]$ . Функция  $g(z)$  возрастающая, поэтому  $E[f] = [g(0); g(16)] = [0; 4]$ . (Самостоятельно нарисуйте графики в системах координат  $Oxz$  и  $Oyz$ .)

**Упражнения**

Найдите первым и третьим методами множество значений функции:

8.  $y = \lg\left(\frac{2x+5}{x-1} - 1\right)$ .

9.  $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} - 1$ .

10.  $y = \log_3(1 - 2\cos x)$ .

**Задача 9.** Найдите множество значений функции  $y = 2\cos x - \cos 2x$ .

**Решение.** На первый взгляд не видно, композицией каких функций является  $y(x)$ . Преобразуем ее:  $y = 2\cos x - \cos 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x + 1$ . Далее,  $y(z) = -2z^2 + 2z + 1 = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ ;  $z = \cos x$ . Тогда  $E[z] = [-1; 1]$ . Ищем наибольшее и наименьшее значения  $y(z)$  на отрезке  $[-1; 1]$ .

Получаем *ответ*:  $[-3; 3/2]$ .

**Упражнения**

Найдите множество значений функции:

11.  $y = 4\cos^2 x + 3\sin^2 2x$ .

12.  $y = 2\sin x \cos 2x + 7\sin x$ .

Если исходная функция представлена как композиция нескольких функций:  $y = f_1(\dots f_{n-1}(f_n(x))\dots)$ , то сначала нужно вычислить множество значений внутренней функции  $E_n = E[f_n(x)]$ . Затем вычислить образ  $E_{n-1} = f_{n-1}(D[f_{n-1}] \cap E_n)$  и так далее.

**Упражнение 13.** Найдите множество значений функции  $y = 7 + 3x - x^2 - 2\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ .

**Задача 10.** При каких значениях  $a$  уравнение  $2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$  имеет хотя бы одно решение?

**Решение.** Переформулируем задачу: найдем множество значений функции  $f(x) = 2\cos^2(2^{2x-x^2}) - \sqrt{3}\sin(2 \cdot 2^{2x-x^2})$ . Представим ее как композицию функций:

$$f(u) = 2\cos^2(u) - \sqrt{3}\sin(2u) = 1 + \cos(2u) - \sqrt{3}\sin(2u) = 1 + 2\cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right); u(z) = 2^z; z(x) = 2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2.$$

Тогда  $E[z] = (-\infty; 1]$ ,  $E[u] = (0; 2]$ . (Нарисуйте соответствующие графики.)

Поскольку  $4 + \frac{\pi}{3} \geq 2u + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3}$ , то  $-1 \leq \cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$ , и  $E(f) = [-1; 2]$ .

*Ответ*:  $[-1; 2]$ .

Можно встретить рекомендации для вычисления границ изменения функции с использованием классических неравенств, например неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Для двух переменных оно имеет вид  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $a, b \geq 0$ . С его помощью можно, например, показать, что  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ,  $x > 0$ . Но с помощью этого неравенства можно получить, вообще говоря, лишь оценку для множества значений. В данном случае оно совпадает с множеством значений  $[2; +\infty)$ . А скажем, для функции

$$y = \frac{\sqrt{2}(3x^2 + 10)}{2\sqrt{x^2 + 2}\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{2x^2 + 8}{x^2 + 2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 8}}$$

множество значений  $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right] \subset [2; +\infty)$  (докажите это).

**Тригонометрические подстановки**

Пусть для функции  $y = f(x)$  удалось найти функцию  $x = g(t)$ ,  $t \in D[g]$  такую, что  $D[f] \subset E[g]$ , а новая функция  $y = f(g(t)) = p(t)$  проще для исследования, чем исходная. При этом  $E[f] = E[p]$ . В качестве  $x = g(t)$  подбирают тригонометрическую функцию. Сам вид тригонометрических формул позволяет добиться существенных упрощений.

**Задача 11.** Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $x\sqrt{1 - 4x^2}(1 - 8x^2) = a$  имеет решение.

**Решение.** Так как  $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ , выберем функцию

$x = \frac{1}{2}\sin t$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Тогда

$$x = \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}(1 - 2\sin^2 t) = \frac{1}{2}\sin t \cos t \cos 2t = \frac{1}{8}\sin 4t.$$

*Ответ*:  $a \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$ .

**Замечание.** Благодаря удачному выбору области определения для функции  $g(t)$  мы существенно сократили решение:  $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$ , так как  $\cos t \geq 0$  при  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Можно дать следующие рекомендации для упрощения радикалов:

$\sqrt{a^2 - x^2}$   $x = a\sin t$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  или  $x = a\cos t$ ,  $t \in [0; \pi]$ ;

$\sqrt{a^2 + x^2}$   $x = atg t$ ,  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  или  $x = actg t$ ,  $t \in (0; \pi)$ ;

$\sqrt{x^2 - a^2}$   $x = \frac{a}{\sin t}$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$  или

$x = \frac{a}{\cos t}$ ,  $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ .

Но это не более чем рекомендации. Они могут и не привести к успеху.

**Упражнения**

Найдите множество значений функции:

14.  $y = \frac{x\sqrt{x^2 + 4} - x^2}{x^2 + 4}$ .

$$15. y = \frac{x}{\sqrt{x - x\sqrt{x^2 - 1}}}.$$

$$16. y = \log_{16} \left( \frac{5 - 12x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 5 \right).$$

**Задача 12.** Найдите множество значений функции  $z = y\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{4 - y^2}$ .

**Решение.** Пусть  $x = \sin u$ ,  $y = 2 \sin v$ ,  $u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Тогда  $z = 2 \sin v \cos u + 2 \sin u \cos v = 2 \sin(u + v)$ .

Ответ:  $[-2; 2]$ .

Еще раз решим задачу 5.

**Задача 5.** Числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенству  $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12$ . Найдите все значения, которые может принимать сумма  $x^2 + y^2$ .

**Решение.** Пусть  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ . Тогда  $x^2 + y^2 = r^2$ . Преобразуем ограничение:  $7r^2 \cos^2 \varphi - 4r^2 \sin \varphi \cos \varphi + 4r^2 \sin^2 \varphi = 12$ ,  $r^2(3 \cos^2 \varphi - 2 \sin 2\varphi + 4) =$

$$= 12, r^2(11 + 3 \cos 2\varphi - 4 \sin 2\varphi) = 24, r^2 = \frac{24}{5 \cos(2\varphi + \psi) + 11},$$

где  $\psi = \arccos \frac{3}{5}$ ,  $E[r^2] = \left[ \frac{24}{5+11}; \frac{24}{-5+11} \right] = \left[ \frac{3}{2}; 4 \right]$ .

Ответ:  $\left[ \frac{3}{2}; 4 \right]$ .

**Упражнение 4.** Найдите множество значений функции  $z = x^2 + 2y^2$ , если  $x^2 - xy + 2y^2 = 1$ .

#### Геометрическая интерпретация

Если удастся увидеть в задаче на вычисление множества значений функции геометрическое содержание, то это позволяет существенно продвинуться в решении задачи.

**Задача 3.** Найдите множество значений функции  $y = \sqrt{15 + 2x - x^2}$ .

**Решение.** Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4^2, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение системы – уравнение окружности радиуса 4 с центром в точке  $(1; 0)$ , неравенство – верхняя полуплоскость. Пересечение двух этих множеств показано на рисунке

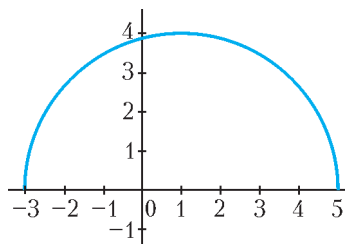


Рис. 5

5. Ортогональная проекция верхней полуокружности на ось ординат является отрезком  $[0; 4]$ .

**Задача 13.** Найдите множество значений функции  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$ .

**Решение.** Функция

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + (0-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(x-3/2)^2 + (0+3\sqrt{3}/2)^2}$$

представляет собой сумму расстояний от точки  $(x; 0)$ , лежа-

щей на оси  $Ox$ , до точек  $A(1; \sqrt{3})$  и  $B(3/2; -3\sqrt{3}/2)$ . Эта сумма не меньше, чем длина отрезка  $AB = \sqrt{19}$ .

Ответ:  $[\sqrt{19}; +\infty)$ .

**Задача 14.** Пусть  $x$  и  $y$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leq 5, \\ y + 4x \leq -5, \\ 3y + 2x \geq -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые могут принимать  $x^2 + y^2$  и  $\frac{y}{x}$ .

**Решение.** Система неравенств описывает треугольник на плоскости  $xOy$ . Его вершины:  $A(-4; 1)$ ,  $B(-2; 3)$ ,  $C(-1; -1)$

(рис. 6);  $x^2 + y^2$  – это квадрат расстояния от точки треугольника  $(x; y)$  до начала координат. Наименьшее расстояние – расстояние до прямой  $BC$ . Выражение  $x^2 + (-4x - 5)^2 = 17x^2 + 40x + 25$  принимает наименьшее

значение  $\frac{25}{17}$  при  $x = -\frac{20}{17} \in$

$[-2; -1]$ . Наибольшее расстояние – длина отрезка

$AO = 17$ . Поскольку  $\frac{y}{x}$  –

тангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат и точку треугольника  $(x; y)$ , наибольшее и наименьшее значения достигаются на прямых  $CO$  и  $BO$ .

Ответ:  $\left[ \frac{25}{17}; 17 \right]$ ,  $\left[ -\frac{3}{2}; 1 \right]$ .

**Упражнение 17.** Пусть  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенству  $3|x - 6| + 2|y + 3| \leq 12$ . Найдите все значения, которые могут принимать  $x^2 + y^2$  и  $\frac{y}{x}$ .

*Замечание от редакции.* Методы решения задач, связанных с множеством значений семейств функций, зависящих от параметра, рассмотрены также в статье В.Голубева и К.Мосевича «Семейства функций», опубликованной в журнале «Квант» №2 за 2006 год.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

ceemat.ru

# Задачи LXX Московской математической олимпиады

## 6 класс

1. По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?

*И.Раскина, Т.Караваева*

2. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

*А.Хачатурян*

3. Волк с тремя поросятами написали детектив «Три поросенка-2», а потом вместе с Красной Шапочкой и ее бабушкой – кулинарную книгу «Красная Шапочка-2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросенку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между ее авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

*А.Блинков*

4. В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трех улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

*Г.Панина*

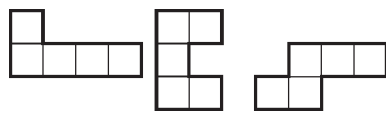


Рис. 1

5. Нарисуйте, как из данных трех фигурок (рис. 1), используя каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.

*С.Маркелов*

6. Кощей Бессмертный похитил у царя трех дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них – царевы дочери, а еще две – мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у нее спрашивать про каждую из пятерых: «Это царевна»?». Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если еще и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей: а) вернуться живым; б) увезти царевен с собой?

*И.Раскина*

## 7 класс

1. Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живет на 6 этаже. Выходя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Таня поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

*Т.Голенищева-Кутузова, И.Яценко*

2. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или на 210 часов ожидания. Когда Алена садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки?

*А.Хачатурян*

3. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат  $4 \times 4$ . Отметьте еще два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площадью 6 клеток.

*Т.Голенищева-Кутузова, И.Яценко*

4. Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрестков которого зарыт клад. На каждом перекрестке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрестком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжет (но Буратино не знает, лжет оно или нет). Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид, показанный на рисунке 2?

(Перекрестки отмечены точками.)

*Т.Голенищева-Кутузова*

## 8 класс

1. За первый год население некоторой деревни возросло на  $n$  человек, а за второй – на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй – на  $n\%$ . Сколько жителей стало в деревне?

*Б.Френкин*

2. Дано натуральное число  $N$ . Для того чтобы найти целое число, ближайшее к  $\sqrt{N}$ , воспользуемся следующим способом: найдем среди квадратов натуральных чисел число  $a^2$ , ближайшее к числу  $N$ ; тогда  $a$  и будет искомым числом. Обязательно ли этот способ даст правильный ответ?

*А.Хачатурян*

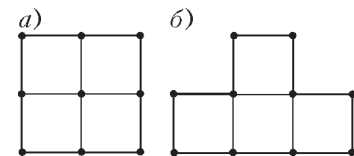


Рис. 2

3. В футбольном чемпионате участвовали 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу, за победу давалось 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0. Назовем команду успешной, если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

*А.Блинков*

4. В треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$  вписана окружность, касающаяся сторон  $AC$ ,  $BC$  и  $AB$  в точках  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно. Через точку  $K$  провели прямую, перпендикулярную отрезку  $MN$ . Она пересекла катет  $AC$  в точке  $X$ . Докажите, что  $CK = AX$ .

*М.Волчкевич*

5. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе – ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока сам не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

*Л.Медников, А.Шаповалов*

6. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  равны,  $M$  – середина стороны  $AD$ . Известно, что угол  $BMC$  равен  $90^\circ$ . Найдите угол между диагоналями четырехугольника  $ABCD$ .

*М.Волчкевич*

### 9 класс

1. Номер нынешней олимпиады (70) образован последними цифрами года ее проведения, записанными в обратном порядке. Сколько еще раз повторится такая ситуация в этом тысячелетии?

*А.Заславский*

2. На параболе  $y = x^2$  выбраны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  так, что прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки  $D$ , если абсциссы точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно.

*Н.Андреев, А.Блинков*

3. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

*Б.Френкин*

4. Выпуклая фигура  $F$  обладает следующим свойством: любой правильный треугольник со стороной 1 можно параллельно перенести так, что все его вершины попадут на границу  $F$ . Обязательно ли  $F$  – круг? (Фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком принадлежит фигуре.)

*С.Маркелов*

5. В однокруговом футбольном турнире играли  $n > 4$  команд. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. Оказалось, что все команды набрали поровну очков. а) Докажите, что найдутся 4 команды, имеющие поровну побед, поровну ничьих и поровну поражений. б) При каком наименьшем  $n$  могут не найтись 5 таких команд?

*А.Заславский*

### 10 класс

1. На сторонах единичного квадрата отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  так, что прямая  $KM$  параллельна двум сторонам

квадрата, а прямая  $LN$  – двум другим сторонам квадрата. Отрезок  $KL$  отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок  $MN$ ?

*С.Дориченко, Р.Женодаров, С.Токарев*

2. Можно ли покрасить 15 отрезков, изображенных на рисунке 3, в 3 цвета так, чтобы никакие 2 отрезка одного цвета не имели общего конца?

*И.Пушкарев*

3. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром в  $O$ . Точка  $X$  – произвольная точка внутри треугольника  $ABC$ , такая, что  $\angle XAB = \angle XBC = \varphi$ , а  $P$  – такая точка, что  $PX \perp OX$ ,  $\angle XOP = \varphi$ , причем углы  $XOP$  и  $XAB$  одинаково ориентированы. Докажите, что все такие точки  $P$  лежат на одной прямой.

*А.Заславский*

4. С ненулевым числом разрешается проделывать следующие операции:  $x \mapsto \frac{1+x}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1-x}{x}$ . Верно ли, что из каждого ненулевого рационального  $x$  числа можно получить каждое рациональное число с помощью конечного числа таких операций?

*А.Петухов*

### 11 класс

1. Круглая мишень разбита на 20 секторов, которые нумеруются по кругу в каком-либо порядке числами 1, 2, ..., 20. Если секторы занумерованы, например (как при игре в дартс), в следующем порядке: 1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18, то наименьшая из разностей между номерами соседних (по кругу) секторов равна  $12 - 9 = 3$  (из большего числа вычитается меньшее). Может ли указанная величина при нумерации в другом порядке быть больше 3? Каково наибольшее возможное значение этой величины?

*И.Сергеев*

2. Значение  $a$  подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же  $a$  имеет второе уравнение?

*В.Алексеев*

3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

*А.Бегуниц*

4. В основании  $A_1A_2 \dots A_n$  пирамиды  $SA_1A_2 \dots A_n$  лежит точка  $O$ , причем  $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$  и  $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$ . При каком наименьшем значении  $n$  отсюда следует, что  $SO$  – высота пирамиды?

*И.Сергеев*

5. Квадрат состоит из  $n \times n$  клеток: две противоположные угловые клетки – черные, а остальные – белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в черный цвет, чтобы после этого с помощью преобра-

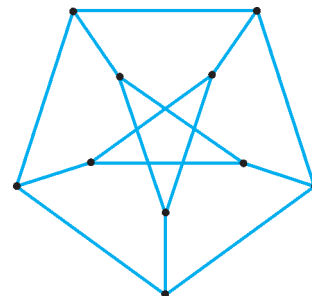


Рис. 3



зований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки этого квадрата?

*В.Алексеев*

6. Точки  $A', B'$  и  $C'$  – середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно, а  $BH$  – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников  $AHC'$  и  $CHA'$  окружности проходят через точку  $M$ , отличную от  $H$ , то  $\angle ABM = \angle CBV'$ .

*В.Филимонов*

7. Миша мысленно расположил внутри данного круга единичного радиуса выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, а Коля пытается угадать его периметр. За один шаг Коля указывает Мише какую-либо прямую и узнает от него, пересекает ли она многоугольник. Имеет ли Коля возможность наверняка угадать периметр многоугольника через 3 шага с точностью до 0,3?

*О.Косухин*

Публикацию подготовил Б.Френкин

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## Первый теоретический тур

### 7 класс

1. Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Земли и Марса. Марс совершает оборот вокруг Солнца за 687 земных дней, а Земля – за 365 дней.

*М.Ромашка*

2. На земле лежит слой снега толщиной  $h = 70$  см. Давление снега на землю (без учета атмосферного давления)  $p = 630$  Па. Погода морозная, и снег состоит из воздуха и льда. Определите, сколько процентов объема снега занимает лед, а сколько – воздух. Плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,9$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*М.Ромашка*

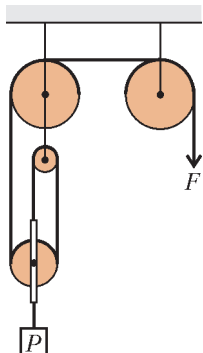


Рис. 1

3. На заводе для подъема тяжелых заготовок используется система из четырех блоков и одного троса, закрепленных на потолке, как показано на рисунке 1. С какой силой  $F$  надо тянуть вниз за конец троса, чтобы удерживать или медленно и равномерно поднимать заготовку, вес которой равен  $P$ ? Участки троса, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны, весом блоков, троса и трением можно пренебречь.

*М.Семенов*

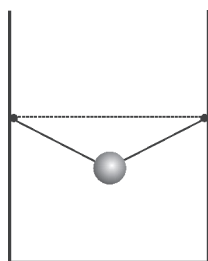


Рис. 2

4. Сплошной шарик подвешен в сосуде на двух легких нитях, как показано на рисунке 2. Свободные концы нитей закреплены на одной высоте. После того как сосуд заполнили водой и шарик оказался полностью погруженным в воду, натяжение нитей не изменилось. Определите плотность  $\rho$  материала, из которого изготовлен шарик. Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

*И.Горбатый*

### 8 класс

1. В широкий сосуд с водой медленно опускают на нити цилиндрический брусок так, что ось цилиндра все время остается вертикальной. График зависимости силы натяжения нити  $F$  от глубины погружения  $h$  нижнего основания цилиндра является отрезком прямой линии, как показано на рисунке 3. Найдите площадь основания цилиндра и его массу. Плотность воды  $\rho_0 = 1$  г/см<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*М.Ромашка*

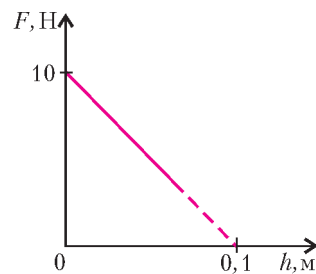


Рис. 3

2. В сосуде находился лед при температуре  $t_{\text{л}} = 0^\circ\text{C}$ . Туда влили воду массой  $m_{\text{в}} = 0,4$  кг, взятую при температуре  $t_{\text{в}} = 60^\circ\text{C}$ . Какая температура установилась в сосуде, если конечный объем его содержимого  $V = 1$  л? Чему равна масса содержимого сосуда? Плотности воды и льда  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>, их удельные теплоемкости  $c_{\text{в}} = 4200$  Дж/(кг·°C) и  $c_{\text{л}} = 2100$  Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

*М.Ромашка*

3. В одном из двух одинаково длинных «черных ящиков» находится постоянный магнит, а в другом – длинная катушка из медной проволоки, подключенная к источнику постоянного тока. Как, используя только эти «черные ящики», определить, в каком из них находится постоянный магнит? Нельзя заглядывать внутрь ящиков, разбирать ящики и разрушать их.

*И.Горбатый*

### 9 класс

1. «Черный ящик» представляет собой систему, изоб-

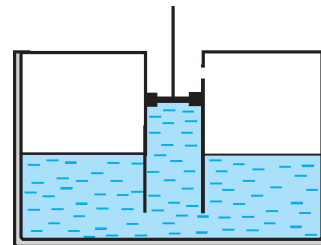


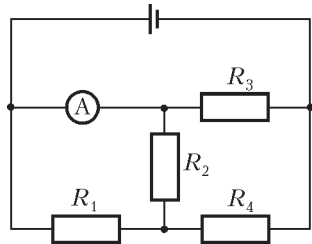
Рис. 4

раженную на рисунке 4. Внутри находится вода и погруженный в нее узкий вертикальный цилиндр с поршнем. К поршню прикреплен выходящий наружу вертикальный шток. Потянув за шток и подвигав его вверх-вниз, школьник решил, что в «черном ящике» находится прикрепленная к штоку пружина, и измерил ее жесткость. Она оказалась равной  $k = 100 \text{ Н/м}$ . Чему равна площадь поршня? Трением и массой поршня можно пренебречь. Плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*М.Ромашка*

2. В электрической цепи, изображенной на рисунке 5, напряжение источника равно  $U = 9 \text{ В}$ , сопротивления резисторов  $R_1 = R_3 = 60 \text{ Ом}$  и  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ . Амперметр, который можно считать идеальным, показывает силу тока  $I = 0,185 \text{ А}$ . Найдите силы токов, текущих через резисторы с сопротивлениями  $R_2$  и  $R_3$ , и сопротивление четвертого резистора.

Рис. 5



*М.Ромашка*

**10 класс**

1. По гладкому горизонтальному столу скользит однородная линейка длиной  $L = 25 \text{ см}$ . В некоторый начальный момент времени скорости концов линейки перпендикулярны к ней, направлены в разные стороны и равны  $v_1 = 10 \text{ см/с}$  и  $v_2 = 30 \text{ см/с}$ . Какая скорость будет у центральной точки линейки через время  $t = 5 \text{ с}$  после начального момента? За какое время от начального момента линейка повернется на угол  $90^\circ$  от исходного положения?

*А.Зильберман*

2. В системе, изображенной на рисунке 6, грузы 1 и 2 прикреплены к нитям, массы грузов 1, 2 и 3 равны  $M$ ,  $2M$  и  $3M$  соответственно. Найдите их ускорения. Трение отсутствует. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны.

*А.Зильберман*

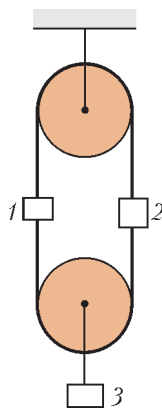


Рис. 6

3. По горизонтальному столу катится без трения тележка массой  $M$  со скоростью  $v_0$ . На горизонтальную поверхность тележки положили кирпич массой  $m$ , начальная скорость которого относительно стола была равна нулю. Кирпич продвинулся по тележке на расстояние  $l$  и остановился относительно нее. Найдите коэффициент трения между кирпичом и тележкой.

*М.Ромашка*

4. Изображенная на рисунке 7 электрическая цепь состоит из двух соединенных друг с другом «черных ящиков», каждый из которых имеет три вывода.

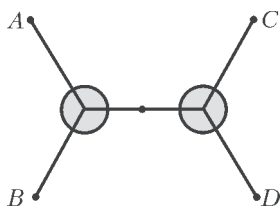


Рис. 7

При подключении к клеммам  $A$  и  $C$  омметр показывает значение сопротивления  $R_{AC}$ , при подключении к клеммам  $B$  и  $D$  — значение  $R_{BD}$ , при подключении к клеммам  $A$  и  $D$  — значение  $R_{AD}$ . Что покажет омметр при подключении к клеммам  $B$  и  $C$ ? Известно, что в «черных ящи-

ках» находятся только различным образом соединенные резисторы.

*Д.Харабадзе*

**11 класс**

1. Одна из разновидностей так называемой планетарной передачи состоит из центральной (солнечной) шестерни ( $C$ ), нескольких планетарных шестерен ( $\Pi$ ), оси которых соединены жесткой рамой — водилом ( $B$ ), и кольцевой шестерни ( $K$ ), имеющей внутреннее зацепление с планетарными (рис.8). Пусть радиусы солнечной и планетарных шестерен равны и солнечная шестерня приводится во вращение с угловой скоростью  $\omega$ . С какой угловой скоростью будет вращаться кольцевая шестерня, если водило зафиксировано? С какой угловой скоростью будет вращаться водило, если кольцевая шестерня зафиксирована? С какой угловой скоростью в последнем случае будет вращаться планетарная шестерня?

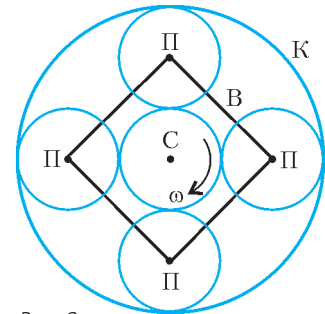


Рис. 8

*Б.Обморшев*

2. На длинной нити, перекинутой через блок, висят грузы массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис.9). На высоте  $h_0$  над более легким грузом держат шайбу из пластилина массой  $m_3$ . Известно, что  $m_3 > m_2 - m_1 > 0$ . В некоторый момент грузы массами  $m_1$  и  $m_2$  приходят в движение без начальной скорости. Когда первый груз доходит до шайбы, ее отпускают без начальной скорости, и шайба прилипает к грузу. На какую максимальную высоту над начальным положением поднимется шайба? Трение и масса блока пренебрежимо малы. Нить невесомая и нерастяжимая, ее участки, не лежащие на блоке, вертикальны.

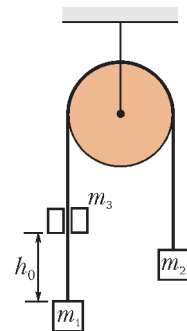


Рис. 9

*М.Ромашка*

3. Если направить поток протонов на кусок льда из тяжелой воды  $D_2O$ , то при минимальной кинетической энергии протонов  $E_1 = 1,4 \text{ МэВ}$  происходит ядерная реакция с образованием ядер  $^3_2\text{He}$ . Какую минимальную кинетическую энергию  $E_2$  надо сообщить ядрам дейтерия, чтобы при их попадании на кусок льда из обычной воды произошла та же ядерная реакция?

*С.Варламов*

4. В сосуде находился лед при температуре  $t_{\text{л}} = -20^\circ\text{C}$ . Туда влили воду массой  $m_{\text{в}} = 0,4 \text{ кг}$ , взятую при температуре  $t_{\text{в}} = 60^\circ\text{C}$ . Каким может быть конечный объем системы, если установившаяся в системе температура: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю? Плотности воды и льда  $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$ , их удельные теплоемкости  $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$  и  $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335 \text{ кДж/кг}$ . Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

*М.Ромашка*

5. Электрическая цепь состоит из двух конденсаторов емкостью  $C$ , двух одинаковых катушек индуктивности  $L$  и идеального трансформатора с коэффициентом трансформации, равным единице (рис.10). Если зарядить один из конденсаторов и замкнуть ключ, подсоединяющий его к

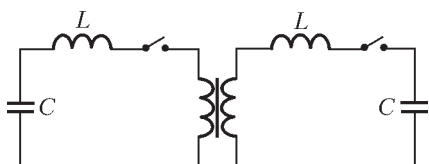


Рис. 10

трансформатору, в цепи возникнут гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Найдите возможные частоты гармонических электрических колебаний в цепи, если замкнуты оба ключа.

*О.Шведов*

## Второй теоретический тур

### 8 класс

1. Два велосипедиста одновременно выезжают навстречу друг другу из деревень Липовка и Демушкино, находящихся на расстоянии  $L = 10$  км друг от друга. Каждый планирует ехать со скоростью  $v = 20$  км/ч и, достигнув противоположной деревни, сразу повернуть обратно. Но на пути все время дует ветер, скорость и направление которого постоянны. При движении по ветру скорость увеличивается на столько же, на сколько уменьшается при движении против ветра. Велосипедист, который сначала ехал по ветру, достигнув противоположной деревни, сразу повернул назад, а велосипедист, который сначала ехал против ветра, задержался в противоположной деревне, чтобы отдохнуть, и только потом повернул обратно. Известно, что велосипедисты встречались в точках  $A$  и  $B$ , находящихся на расстояниях  $L_A = 2$  км и  $L_B = 6$  км от Липовки. Найдите времена движения из Липовки в Демушкино и из Демушкино в Липовку. В какой деревне и в течение какого промежутка времени отдыхал велосипедист, ехавший сначала против ветра?

*М.Ромашка*

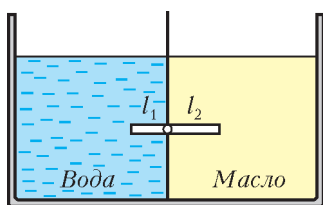


Рис. 11

2. Плотность масла измеряют в опыте, схема которого показана на рисунке 11. Сосуд разделен на две части вертикальной перегородкой. В одну часть сосуда налита вода, в другую – масло. В перегородку встроены шарнир, который может вращаться без трения. В шарнир вставлена однородная сосновая линейка, которая находится в равновесии. Длина левой части линейки  $l_1 = 40$  см, правой  $l_2 = 60$  см. Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность линейки  $\rho = 600$  кг/м<sup>3</sup>. Чему равна плотность масла?

*М.Ромашка*

3. Вазон для цветов, стоящий на улице, имеет плоское дно и вертикальные стенки. Толщина слоя земли в вазоне  $h = 15$  см, а температура земли  $t = 11$  °С. На улице похолодало, и пошел снег. Снежинки состоят из льда, имеют массу  $m = 50$  мг, объем  $V = 0,5$  см<sup>3</sup> и температуру  $t_0 = 0$  °С. Они падают вертикально с постоянной скоростью  $v = 1$  м/с. В объеме воздуха  $V_0 = 1$  м<sup>3</sup> находится  $N_0 = 100$  снежинок. За какое время на земле в вазоне нарастет слой снега толщиной  $H = 10$  см? Считайте, что вся земля в вазоне равномерно пропитывается водой, имеет в любой момент одну и ту же температуру во всем объеме и почти не обменивается теплом со стенками вазона и с воздухом. Плотность земли  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоемкость земли  $c = 900$  Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг.

*М.Семенов, М.Ромашка*

### 9 класс

1. На неподвижно закрепленном цилиндре радиусом  $R$  лежит тонкая линейка длиной  $l = 2\pi R$  и массой  $M$ . Линейка расположена горизонтально перпендикулярно к оси цилиндра и опирается на него своей серединой. На середине линейки сидит жук массой  $0,2M$ , который начинает медленно ползти к одному из концов линейки, прочно цепляясь за ее шероховатости; линейка при этом меняет угол своего наклона к горизонту, перекаtywаясь по цилиндру без проскальзывания. На каком расстоянии от середины линейки будет расположена точка соприкосновения линейки и цилиндра, когда жук доползет до конца линейки? Под каким углом к горизонту будет при этом наклонена линейка? При каких значениях коэффициента трения между цилиндром и линейкой возможно такое ее перекаtywание без проскальзывания?

*И.Горбатый*

2. Электрическая цепь, изображенная на рисунке 12, состоит из идеальной батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров. Показание миллиамперметра  $A_1$  равно  $I_1 = 1,6$  мА, показания вольтметров равны  $U = 1,2$  В и  $U' = 0,3$  В. Какой из вольтметров –  $V_1$  или  $V_2$  – показывает меньшее напряжение? Найдите показание миллиамперметра  $A_2$  и напряжение батарейки.

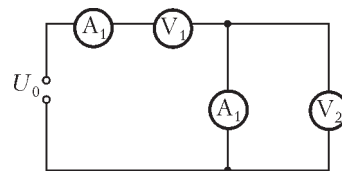


Рис. 12

*А.Зильберман*

3. Длинное наклонное зеркало соприкасается с горизонтальным полом и наклонено под углом  $\alpha$  к вертикали (рис. 13). К зеркалу приближается школьник, глаза которого расположены на высоте  $h$  от уровня земли. На каком максимальном расстоянии от нижнего края зеркала школьник увидит: а) изображение своих глаз; б) свое изображение полностью во весь рост?

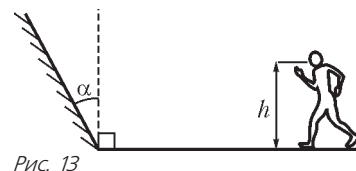


Рис. 13

*М.Ромашка*

### 10 класс

1. Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом  $\alpha_1 = 30^\circ$  к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость  $v_1 = v$ , а при броске под углом  $\alpha_2 = 60^\circ$  – начальную скорость  $v_2 = v/2$ . На какой высоте над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом к горизонту наклонен отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения равно  $g$ .

*А.Зильберман*

2. Найдите ускорения грузов 1 и 2 и силу натяжения нити в системе, изображенной на рисунке 14. Массы грузов 1, 2, 3 и 4 равны  $M_1, M_2, m_1$  и  $m_2$  соответственно. Грузы 3 и 4 касаются грузов 1 и 2, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить натянута, невесома и нерастяжима, блоки легкие, трение отсутствует.

*А.Зильберман*

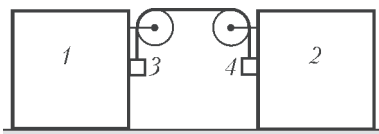


Рис. 14

кой проводящей сферической поверхности радиусом  $R = 0,8$  м (рис.15). Второй

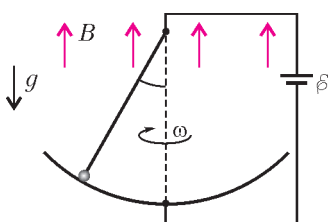


Рис. 15

к батарее. Если стержень закрутить вокруг вертикальной

### 11 класс

1. На конце невесомого проводящего стержня закреплен маленький металлический шарик, касающийся глад-

кой проводящей сферической поверхности радиусом  $R = 0,8$  м (рис.15). Второй конец стержня закреплен в центре сферы при помощи проводящего шарнира так, что стержень может вращаться без трения вокруг него, сохраняя электрический контакт со сферой. Эта система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл и подключена

оси в определенном направлении с частотой  $\omega = 5$  с<sup>-1</sup> и под определенным углом к вертикали, то этот угол и частота вращения в дальнейшем не будут меняться. Определите этот угол и ЭДС батареи. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Ю. Старокуров, М. Семенов

2. Звуковая волна от удаленного источника падает на стену, имеющую вогнутую цилиндрическую форму, под углом, близким к  $\alpha$ , причем эта волна идет перпендикулярно оси цилиндра. Определите, в какую точку вблизи стены следует поместить чувствительный микрофон, чтобы он зарегистрировал максимально возможную интенсивность звука. Найдите расстояния от этой точки до стены и до оси цилиндра. Радиус цилиндра  $R$  много больше размеров стены, но много меньше расстояния до источника. Длина волны звука много меньше размеров стены.

О. Шведов

Публикацию подготовили М. Семенов, А. Якута

# Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

В память о ярком человеке, талантливом математике и выдающемся педагоге Игоре Федоровиче Шарыгине (1937–2004) ряд российских научных организаций и учебных заведений решили ежегодно, начиная с 2005 года, проводить геометрическую олимпиаду школьников. В оргкомитет и жюри олимпиады вошли известные ученые, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов. Олимпиада состоит из двух туров: заочного и финального. В заочном туре, задачи которого публикуются в газете «Математика» и на сайте Московского центра непрерывного математического образования ([www.mcsme.ru](http://www.mcsme.ru)), могут принимать участие все желающие школьники. Победители заочного тура приглашаются на финал. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад. Финальный тур проводится в устной форме.

Финальные туры двух первых олимпиад прошли в сентябре 2005 в Москве и в июле 2006 года в Дубне. Материалы этих олимпиад опубликованы в книге «Геометрические олимпиады им. И.Ф.Шарыгина» (М.: МЦНМО, 2007), посвященной 70-летию И.Ф.Шарыгина.

Среди победителей двух первых олимпиад хочется отметить Е.Авксентьева (Ростов), С.Сафина (Краснодар), М.Лысова, Н.Печёнкина, Р.Девятова, М.Илюхину (все – Москва), не только показавших высокие результаты, но и нашедших в ряде задач более красивые решения, чем были у жюри.

Ниже приводятся избранные задачи первых двух олимпиад (с решениями) и несколько задач заочного тура третьей олимпиады (для самостоятельного решения).

### Задачи

1 (В.Протасов). Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке  $O$ . Вершина  $A$  правильного треугольника  $ABC$  лежит на большей окружности, а середина

сторон  $BC$  – на меньшей. Чему может быть равен угол  $BOC$ ?

**Решение** (М.Лысов). Это, пожалуй наиболее элегантное, решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии. Пусть имеется некоторый отрезок  $AB$  на плоскости и некоторое положительное число  $\lambda$ . Тогда геометрическое место точек  $X$ , таких что  $\frac{AX}{BX} = \lambda$ ,

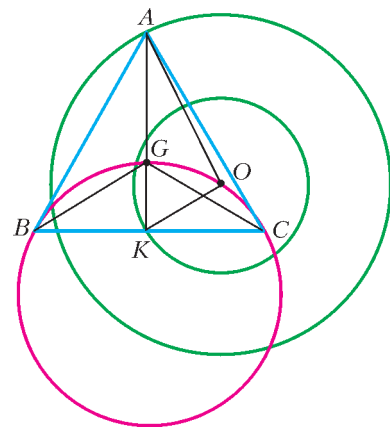


Рис. 1

есть некоторая окружность. Если  $P$  и  $Q$  – точки, которые делят отрезок в отношении  $\lambda$  (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке  $PQ$  как на диаметре. Она называется окружностью Аполлония.

Из условия нашей задачи сразу следует, что  $AG/KG = AB/KB = AC/KC = AO/KO = 2$  (рис. 1), откуда вытекает, что точки  $B, G, O, C$  лежат на окружности Аполлония для отрезка  $AK$  и  $\lambda = 2$ . Понятно, что  $\angle BOC = \angle BGC = 120^\circ$  (или  $180^\circ - \angle BGC = 60^\circ$ ).

2 (В.Пайлс, Нидерланды). На плоскости даны два отрезка  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , причем  $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$ . На отрезке  $A_1A_2$  взята точка  $A_3$ , а на продолжении этого отрезка за точку  $A_2$  – точка  $A_4$ , так что  $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$ . Аналогично, на отрезке  $B_1B_2$  берется точка  $B_3$ , а на продолжении этого

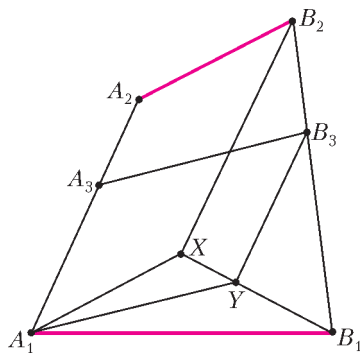


Рис. 2

$B_3Y = kB_2X = A_1A_3$ . Следовательно,  $A_1A_3B_3Y$  – параллелограмм, т.е.  $A_3B_3 \parallel A_1Y$ . Аналогично, прямая  $A_4B_4$  параллельна внешней биссектрисе угла  $X A_1B_1$ , и, значит, прямые  $A_3B_3$  и  $A_4B_4$  перпендикулярны.

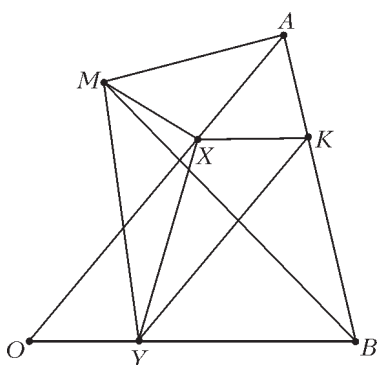


Рис. 3

стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть  $M$  – точка, симметричная  $K$  относительно  $XU$ . Докажем, что  $M$  – искомая.

Пусть прямая, проходящая через  $K$ , пересекает прямые  $OX$  и  $OY$  в точках  $A$  и  $B$ . Заметим, что  $MX = KX$ ,  $MY = KY$ ,  $\Delta MXU = \Delta KXU = \Delta OYU$ , поэтому  $MOYU$  – равнобокая трапеция и  $\angle MXO = \angle MYO$ . Значит,  $\angle MXA = 180^\circ - \angle MYO = \angle MYM$ . Далее, треугольники  $AXK$  и  $KYB$  подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому  $KX/XA = BY/YK$ . Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

отрезка за точку  $B_2$  – точка  $B_4$ , так что  $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k$ . Найдите угол между прямыми  $A_3B_3$  и  $A_4B_4$ .

**Решение** (С.Сафин). Построим параллелограмм  $A_1A_2B_2X$  и проведем биссектрису  $A_1Y$  треугольника  $A_1XB_1$  (рис.2).

Так как  $\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k$ ,

получим  $B_3Y \parallel B_2X$  и

**3** (В.Протасов). На плоскости дан угол и точка  $K$  внутри него. Докажите, что найдется точка  $M$ , обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через  $K$ , пересекает стороны угла в точках  $A$  и  $B$ , то  $MK$  является биссектрисой угла  $AMB$ .

**Решение** (Р.Девятков). Пусть  $O$  – вершина угла (рис.3). Построим параллелограмм  $KXOY$ , две

Из этого равенства и из равенства углов  $MXA$  и  $BYM$  находим, что треугольники  $MXA$  и  $BYM$  подобны.

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что  $MK$  – биссектриса треугольника  $AMB$ .

**4** (Б.Френкин). Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

(Ответ:  $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ .)

**5** (Б.Френкин). а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (Укажите все возможные значения.)

б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями?

(Ответ: а) 0, 1, 2 или 4; б) 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 9.)

**6** (А.Заславский). Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки  $A, B, C$  (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

(Ответ: окружность, проходящая через вершины равнобедренных треугольников с основаниями  $AB, BC, CA$  и углами  $120^\circ$ , построенных внутрь треугольника  $ABC$ .)

**7** (Д.Шноль). Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае? (Найдите ответ с точностью до 0,1; радиус Земли считайте равным 6000 км.)

(Ответ: в  $\sqrt{2}$  раз.)

**8** (Л.Емельянов). Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

(Ответ: все, кроме равнобедренных неостроугольных.)

**9** (Б.Френкин). Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

(Указание: расстояние от вершины  $A$  треугольника  $ABC$  до его ортоцентра равно удвоенному расстоянию от центра описанной окружности до стороны  $BC$ .)

Публикацию подготовил А.Заславский

## Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба «Глюон». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальным наукам и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных

научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами (по 5 человек в каждой) в два тура – заочный и очный.

## XI Турнир «Компьютерная физика»

По итогам двух туров турнира абсолютным победителем стала команда ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени были награждены команды ФМЛ 1580 при МГТУ и лица 1511 при Московском инженерно-физическом институте, сборная команда Удмуртии и сборная команда города Ижевска. Диплом II степени получила команда Классического лица 1 при РГУ (г.Ростов-на-Дону), а диплом III степени – команда МТЛ города Самары.

### Заочный тур «Поверхностное натяжение»

Предлагалось на примере простой микроскопической модели изучить явление поверхностного натяжения и определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости по заданному потенциалу межмолекулярного взаимодействия. Подробно о модели и конкретном задании можно прочитать в «Кванте» № 5 за 2006 год. Здесь же будет рассказано лишь о разборе этого задания.

Движение частиц в капле описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij} \left( \vec{r}_i - \vec{r}_j \right),$$

где  $i = 1, \dots, N$  – номер атома,  $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$  – радиус-вектор  $i$ -й частицы,  $\vec{F}_{ij}$  – сила взаимодействия между частицами  $i$  и  $j$ , определяемая по потенциалу Леннарта–Джонса. При моделировании начальные значения модуля скорости частиц выбираются случайным образом из распределения Максвелла с некоторой температурой  $T$ , угловое распределение по скоростям задается изотропным. Полагается, что расстояние между частицами соответствует равновесному  $r^* = \sqrt[6]{2r_0}$ , а геометрическая форма капли – произвольная.

Начальная форма двумерной капли была выбрана в виде прямоугольника с соотношением сторон 4:1 и содержала число частиц  $N = 160$  при  $T = 15$  К. В результате моделирования оказывается, что некоторое количество атомов отрывается от капли (испаряется) и образует пар, находящийся в динамическом равновесии с жидкой фазой. Через некоторое время капля приобретает форму, близкую к шару. Такая форма соответствует минимальной величине поверхностной энергии.

При моделировании было показано, что изменение потенциальной энергии взаимодействующих частиц пропорционально площади поверхности капли (для двумерной капли в качестве площади поверхности выступает ее периметр).

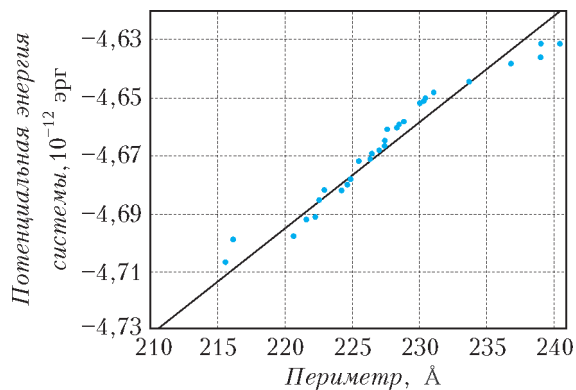


Рис. 1

Зависимость изменения потенциальной энергии от изменения площади поверхности представлена на рисунке 1. Величина коэффициента поверхностного натяжения определяется как тангенс угла наклона полученной прямой и составляет  $3,33 \cdot 10^{-8}$  эрг/см при  $T = 20$  К.

На рисунке 2 представлена зависимость коэффициента поверхностного натяжения при  $T = 20$  К от числа частиц,

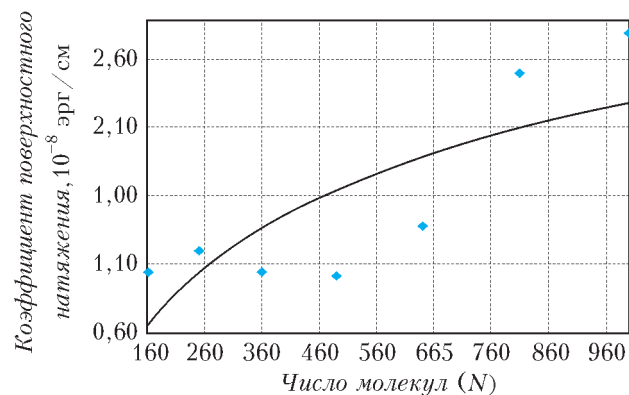


Рис. 2

образующих каплю. Как видно, с увеличением числа частиц коэффициент поверхностного натяжения плавно возрастает и приближается к значению, соответствующему макроскопически большому числу частиц.

Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры для капли, содержащей 160 частиц, приведена на рисунке 3. Полученная зависимость подтверждает

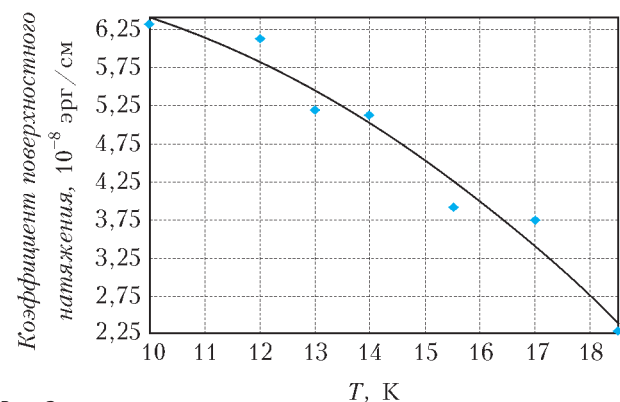


Рис. 3

известный экспериментальный факт убывания коэффициента поверхностного натяжения с увеличением температуры, что связано с увеличением среднего расстояния между атомами.

Решение представлено командой сборной Удмуртии в составе: Жуйков Богдан, Задумин Евгений, Лебедев Артем, Мозгунов Кирилл, Печерский Роман.

## XII Турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XII Турнире «Компьютерная физика» в январе – феврале 2007 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр.,15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-80-14, факс: (495) 396-82-27

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www.gluon.informika.ru

### Заочный тур «Лазерная искра»

Создание лазерных источников электромагнитного излучения в начале 60-х годов прошлого века позволило получить интенсивности электромагнитного излучения в видимом диапазоне частот вплоть до  $10^{10} - 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup>. Такие значения на много порядков превышали мощности световых потоков, достижимые в долазерную эпоху. Как результат, в первой половине 60-х годов XX века был экспериментально обнаружен целый ряд новых физических эффектов, положивших начало бурному развитию новой области физики – нелинейной оптики. Одним из них был эффект пробоя газов излучением оптической частоты (лазерная искра), обнаруженный в 1963 году.

Явление пробоя газов внешними постоянными или переменными электрическими полями было известно давно и изучалось еще в начале прошлого века. И хотя физика развития электронной лавины в газах под действием внешнего электрического поля стала понятна еще в 20-х годах, экспериментальное наблюдение лазерной искры в поле излучения рубинового лазера вызвало сенсацию в научном мире.

Лавинообразное увеличение числа электронов в фокусе лазерного пучка происходит в результате ионизации атомов (молекул) газа электронами, которые набирают энергию в поле лазерного излучения. В случае если энергия электрона превышает потенциал ионизации  $I_i$  атома, то при столкновении электрона с атомом с некоторой вероятностью может произойти процесс ионизации, в результате которого образуется положительный ион и еще один электрон:  $A + e \rightarrow A^{++} + 2e$ . Вероятность этого процесса – в дальнейшем мы будем ее характеризовать константой скорости  $k_i$  – резко зависит от напряженности электрического поля волны. Кроме того, существуют и каналы гибели электронов: это, прежде всего, диффузионный уход электронов из фокального объема, а также процесс прилипания. (Под прилипанием понимают процесс рекомбинации электрона на нейтральный атом (молекулу) с образованием отрицательного иона. Атомы (молекулы), у которых существуют устойчивые связанные состояния отрицательных ионов, называются электроотрицательными. К их числу относятся, например, атомы и молекулы кислорода.) В дальнейшем процесс прилипания будем характеризовать константой скорости  $k_a$ . Значения этой константы, а также коэффициента диффузии электронов в первом приближении могут считаться постоянными и независимыми от интенсивности воздействующего излучения.

Для теоретического описания развития лавины в поле лазерного излучения необходимо составить уравнение баланса электронов, рождающихся в поле лазерного излучения и гибнущих в результате процессов рекомбинации, прилипания и диффузии. С учетом этих процессов уравнение для распределения концентрации электронов  $n$  в объеме сфокусированного лазерного пучка (в приближении сферически симметричной фокусировки) можно записать в виде

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rn(r,t))}{\partial r^2} + v_i n - v_a n, \quad (*)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии электронов,  $v_i = Nk_i$  и  $v_a = Nk_a$  – частоты ионизации и прилипания,  $k_i$  и  $k_a$  – введенные ранее константы скорости,  $N$  – концентрация атомов (молекул). Для решения уравнения (\*) необходимо задать некоторое начальное распределение затравочных электронов, с которых начинается развитие электронной лавины в газе. В реальности они возникают за счет эффекта многофотонной ионизации атомов сильным лазерным полем, иони-



зации примесных микрочастиц, которые практически всегда присутствуют в газах, частиц космического фона излучения и других причин.

### Задание

Разработайте алгоритм решения уравнения (\*), описывающего развитие электронной лавины в поле лазерного импульса с интенсивностью  $P$  и длительностью  $\tau$ . Считайте, что импульс имеет прямоугольную форму. Размер области фокусировки  $R_0$ . Формально уравнение (\*) описывает диффузию электронов в безграничном пространстве, однако при численном его интегрировании из физических соображений необходимо выбрать некоторый максимальный размер области счета  $R_{\max} > R_0$ .

1. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического излучением  $\text{CO}_2$  лазера ( $\lambda = 10,6$  мкм) в зависимости от давления окружающего газа. Распределение интенсивности излучения по радиусу таково:  $P = P_0 \exp(-r^2/R_0^2)$ .

2. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического пробоя в зависимости от размера пятна фокусировки.

3. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического пробоя в зависимости от длительности лазерного импульса.

Все исследования проведите для гелия (эффект прилипания отсутствует) и воздуха (смесь азота и кислорода, молекулы кислорода обладают свойством электроотрицательности). Под порогом пробоя будем понимать такую интенсивность излучения, при которой за время импульса в центре фокального пятна степень ионизации образующейся плазмы успевает возрасти до значения  $\alpha = n/N \approx 0,01$ . Исследования проведите в диапазоне  $p = 0,001 - 1$  атм (температуру газа считать равной 300 К); радиус пятна фокусировки  $R = 0,01 - 0,3$  см; длительность импульса  $\tau = 10^{-9} - 10^{-6}$  с.

Используйте следующие зависимости и значения параметров, входящих в уравнение (\*):

константа скорости прилипания электронов к молекуле кислорода  $k_a = 10^{-13}$  см<sup>3</sup>/с;

константы скорости ионизации в воздухе  $k_i = AN \exp(-B/E)$ ,  $A = 4,6 \cdot 10^{-8}$  см<sup>3</sup>/с,  $B = 1,37 \cdot 10^6$  см/В,

в гелии  $k_i = AN \exp(-B/E)$ ,  $A = 0,9 \cdot 10^{-8}$  см<sup>3</sup>/с,  $B = 1,46 \times 10^7$  см/В;

коэффициент электронной диффузии  $D = C/N$ ,  $C = 3 \cdot 10^{22}$  1/(см · с).

Публикацию подготовили  
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева

(Начало см. на с. 16)

потребуем, чтобы гипотенуза  $z$  была точным квадратом:

$$m^2 + n^2 = g^2, \quad (2)$$

где  $g$  – натуральное число. Прямоугольных треугольников с таким свойством существует бесконечное множество, мы назовем их *подходящими*.

Алгоритм «сборки» эйлеровых треугольников следующий.

1. Возьмем два подходящих треугольника, выбрав нужную пару чисел  $m_1, n_1$ ;  $m_2, n_2$  и рассчитав по ним длины сторон  $x_1, y_1, z_1$ ;  $x_2, y_2, z_2$  пифагоровых треугольников по формулам (1). Пропорционально увеличим стороны каждого из этих треугольников:  $k_1 x_1, k_1 y_1, k_1 z_1$ ;  $k_2 x_2, k_2 y_2, k_2 z_2$  так, чтобы в итоге оказались равными стороны, формируемые четными катетами основных пифагоровых треугольников:

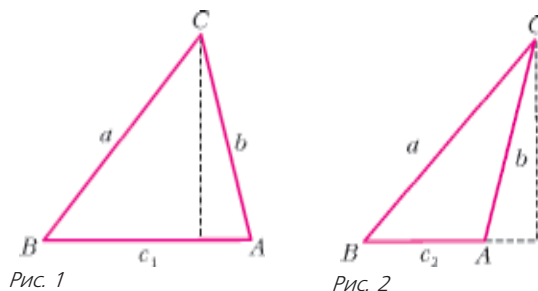
$$k_1 y_1 = k_2 y_2,$$

или

$$k_1 m_1 n_1 = k_2 m_2 n_2, \quad (3)$$

где  $k_1, k_2$  – некоторые целые числа.

2. «Соберем» новый треугольник, совместив равные катеты двух полученных на предыдущем шаге треугольников. Это можно сделать двояко, как показано на рисунках 1 и 2, на которых итоговый треугольник  $ABC$  выделен красным цветом. Стороны  $a$  и  $b$  окончательного треугольника образованы гипотенузами прямоугольных треугольников, полученных на предыдущем шаге, а третья сторона равна сумме катетов этих треугольни-



ков:

$$c_1 = k_1(m_1^2 - n_1^2) + k_2(m_2^2 - n_2^2)$$

или их разности:

$$c_2 = k_1(m_1^2 - n_1^2) - k_2(m_2^2 - n_2^2).$$

В качестве полезного, но технически громоздкого упреждения предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что как в одном, так и в другом случае треугольник  $ABC$  является эйлеровым, т.е. у него все три биссектрисы выражаются рациональными числами.

Построенные нами треугольники обладают целым букетом и других замечательных свойств. Например, у них не только стороны, но и площадь выражаются целыми числами (такие треугольники по традиции называют героновыми). А отсюда следует, что все три высоты, радиус вписанной и радиус описанной окружностей треугольника  $ABC$  выражаются рационально. Наверное, Леонард Эйлер порадовался бы такому результату.

*Р.Сарбаш, А.Елизаров*

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### КМШ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Проведем 6 кругов радиуса  $a$  с центрами в вершинах аудиторно-шестиугольника (рис.1). Каждый студент попадает либо в 2, либо в 3, либо в 6 кругов (точка в центре). Поскольку храпометры в сумме зафиксировали 7 спящих, то двое спящих студентов попали в пересечение двух кругов, а один – в пересечение 3 кругов. Всего на лекции спали 3 студента.

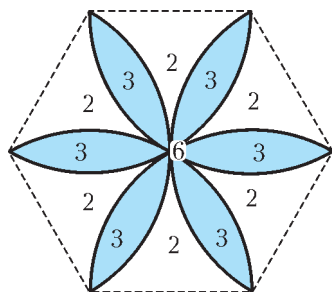


Рис. 1

2. Достаточно доказать, что точка  $P$  пересечения диагоналей является серединой какой-либо диагонали четырехугольника (рис.2).

Пусть точка  $M$  – середина диагонали  $BD$ . Если она не совпадает с точкой  $P$ , то площадь треугольника  $APM$  равна площади треугольника  $CPM$ , так как

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta CDM} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{\Delta ABP} + S_{\Delta CDP}.$$

Но это означает, что  $MP$  является медианой в треугольнике  $ACM$ , т.е. точка  $P$  – середина диагонали  $AC$ .

3. Неверно. Например, для числа 288 не существует нату-

ральных чисел  $n$  таких, что

$$288 = n + S(n) \quad (a)$$

или

$$288 = n - S(n), \quad (б)$$

где  $S(n)$  – сумма цифр числа  $n$ .

Докажем невозможность равенства (а). Этому равенству могут удовлетворять не превышающие 288 натуральные числа  $n$ , делящиеся на 9 (последнее утверждение следует из того, что числа  $n$  и  $S(n)$  имеют одинаковые остатки при делении на 9). Поскольку в этом случае  $S(n) < 2 + 9 + 9 = 20$ , то следует перебрать и проверить только два числа: 270 и 279. Как легко убедиться, ни одно из них не подходит.

Для проверки невозможности равенства (б) переберите трехзначные числа  $n$ , большие 288, но меньшие  $288 + 27 = 315$ , поскольку для них заведомо  $S(n) < 9 + 9 + 9 = 27$ .

4. Пусть  $a$  – длина левого плеча рычажных весов,  $b$  – длина правого плеча,  $k$  – вес колбасы,  $c$  – вес сахара. Тогда, по правилу рычага,  $ca = 8b$ ,  $kb = 2a$ , откуда  $kc = 16$ . Из различных разложений числа 16 на множители:  $16 = 16 \cdot 1 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4$  только первый вариант удовлетворяет условию задачи. Итак, колбаса весит 16 кг, а сахар – 1 кг соответственно,

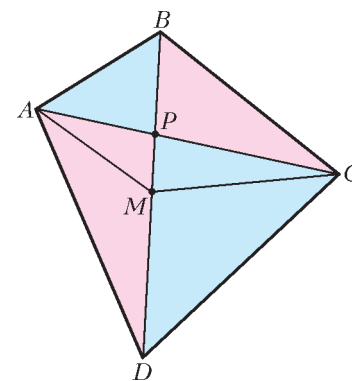


Рис. 2



одно из плечей рычажных весов в 8 раз длиннее другого.

5. Речь идет об электризации через влияние. При поднесении к лицу заряженного предмета происходит электризация микроволосков на коже лица, которая при «шевелении» вызывает на коже ощущения, как будто лица коснулась невидимая паутина.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 1)

16. Предположим, что среди выбранных 40 чисел не найдутся два числа, сумма которых равна 81.

Назовем *дополнительным* к выбранному числу другое число, в сумме с выбранным дающее 81. По предположению, вместе с выбранными все дополнительные числа представляют первые натуральные числа от 1 до 80 включительно. Кроме того, из условия следует, что сумма чисел, дополнительных к выбранным 20 нечетным числам, равна сумме чисел, дополнительных к выбранным 20 четным числам. А так как дополнительным к четному числу является число нечетное, а дополнительным к нечетному числу – четное, то получается, что все четные числа натурального ряда от 1 до 80 дают такую же сумму, что и нечетные числа в этом же промежутке, что неверно. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

17. Укажем способ построения центра вписанной окружности (она же – точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ ) – точки  $O$  (рис. 3).

Проведем  $PQ \perp AB$  и докажем, что четырехугольник  $CPQO$  – ромб. Из равенства  $\triangle ACP = \triangle AQP$  (треугольники равны по гипотенузе и острому углу) следует  $CP = PQ$  и  $\angle CPA = \angle QPA = 67,5^\circ$ . Так как  $\angle BCD = 45^\circ$ , то  $\angle COP = 180^\circ - \angle OCP - \angle OPC = 67,5^\circ$ . Отсюда  $CP = CO$ . Обозначим через  $M$  точку пересечения отрезков  $OP$  и  $CQ$ .

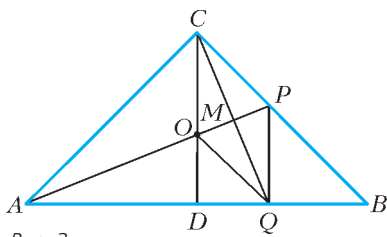


Рис. 3

В равнобедренном треугольнике  $CPQ$  отрезок  $MP$  является биссектрисой, значит, он является также медианой и высотой. В равнобедренном треугольнике  $OCP$  высота  $CM$  является медианой. Отсюда  $OM = MP$ ,  $CM = MQ$ , четырехугольник  $CPQO$  – параллелограмм. Он же – ромб, так как  $OC = CP = PQ$ .

В прямоугольном треугольнике  $PBQ$   $\angle QPB = 45^\circ$ , поэтому  $QB = PQ = PC$ .

Взяв фиксированный раствор циркуля, равный  $PC$ , из точки  $B$  на прямой  $AB$  строим точку  $Q$ , а затем из точек  $Q$  и  $C$  двумя засечками строим точку  $O$ .

Задача всегда имеет решение, и это решение единственно.

18. а) Воспользуемся тождеством

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy).$$

Из него следует, что при натуральных  $x, y$  число  $x^4 + x^2y^2 + y^4$  делится на  $x^2 + xy + y^2$ .

При любых натуральных  $z, t$  имеем

$$z^{16} + z^8t^8 + t^{16} \text{ делится на } z^8 + z^4t^4 + t^8,$$

$$z^8 + z^4t^4 + t^8 \text{ делится на } z^4 + z^2t^2 + t^4,$$

$$z^4 + z^2t^2 + t^4 \text{ делится на } z^2 + zt + t^2.$$

Таким образом, числа  $a = z^2$ ,  $b = zt$ ,  $c = t^2$  удовлетворяют требуемым условиям делимости, а для выполнения остальных условий достаточно положить при этом  $z = t + 1 > 10^{10}$ .

б) Пусть  $a, b, c$  – числа, найденные в предыдущем пункте. Достаточно положить  $A = a^2$ ,  $B = b^2$ ,  $C = c^2$ .

19. По вине редакции в условии этой задачи была допущена неточность. Приведем точную формулировку условия:

Рациональное число  $r$  назовем хорошим, если можно найти  $p + q$  последовательных натуральных чисел, сумма первых  $p$  из которых равна сумме остальных  $q$ , причем  $r = \frac{p}{q}$ . Укажите множество всех хороших рациональных чисел.

Очевидно, что хорошие рациональные числа  $\frac{p}{q}$  удовлетворяют неравенству  $\frac{p}{q} > 1$ . Докажем, что  $\frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$ . Если число  $\frac{p}{q}$  хорошее, то, по условию, для некоторого неотрицательно-целого  $m$  должно выполняться равенство

$$(m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + p) = (m + p + 1) + (m + p + 2) + \dots + (m + p + q). \quad (1)$$

Обозначим  $l = p - q$ . После очевидных преобразований равенство (1) приводится к виду

$$2ml + l^2 + l = 2q^2, \quad (2)$$

или  $\frac{l^2}{q^2} + \frac{l}{q} \cdot \frac{2m+1}{q} = 2$ . Второе слагаемое в левой части последнего равенства положительно, поэтому  $\frac{l^2}{q^2} < 2$ , откуда

$$\text{следует } \frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}.$$

Пусть  $\gamma = \frac{a}{b}$  – произвольное рациональное число из интервала  $(1; 1 + \sqrt{2})$ . Докажем, что можно подобрать  $m, p = na$  и  $q = nb$  ( $n$  натуральное) таким образом, чтобы выполнялось равенство (1). Подставив выражения  $p = na, q = nb$  в равенство (2), получим

$$m = \frac{2b^2n - n(a-b)^2 - (a-b)}{2(a-b)}. \quad (3)$$

Пусть  $n = \frac{r(a-b)}{2}$ , где  $r$  – некоторое натуральное число, подлежащее дальнейшему подбору, причем четное, если числа  $a$  и  $b$  разной четности. Подставив это выражение в равенство (3), получим

$$m = \frac{r(b^2 + 2ab - a^2) - 2}{4}. \quad (4)$$

Несложно убедиться в том, что если положить

$$r = \begin{cases} 4s + 1, & \text{если } a \text{ и } b \text{ нечетны,} \\ 4s + 2, & \text{если } a \text{ и } b \text{ разной четности,} \end{cases}$$

где  $s$  – произвольное натуральное число, то выражение в правой части равенства (4) является целым числом, а с учетом ограничений  $1 \leq \frac{a}{b} < 1 + \sqrt{2}$  – натуральным числом.

Итак, искомое множество хороших рациональных чисел таково:  $(1; 1 + \sqrt{2})$ .

20. а) В результате разрезов каждая клетка доски оказывается разрезанной на два прямоугольных треугольника. В тех частях, на которые разделилась в результате доска, эти треугольники соединяются между собой по общим катетам. Суммарное количество таких общих катетов на всей доске трудно подсчитать – оно равно  $2 \times 7 \times 8 = 112$ , а общее количество треугольников равно  $2 \times 64 = 128$ . Пусть доска разделилась на  $n$  частей и количества треугольников в этих частях равны  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Тогда  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 128$ . С другой стороны, чтобы в  $i$ -й части (для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$ ) соединить все треугольники в одно целое, необходимо задействовать не меньше  $(a_i - 1)$  общих катетов. Поэтому суммарное количество общих катетов не меньше  $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_n - 1) = 128 - n$ . А так как это суммарное количество

равно 112, то  $112 \geq 128 - n$ , и  $n \geq 16$ . Итак, число частей, на которые распадется доска, не меньше 16. С другой стороны, можно привести пример, когда оно равно 16 (рис. 4). Таким образом, окончательный ответ: 16.

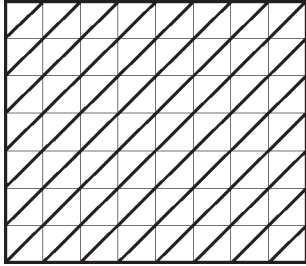


Рис. 4

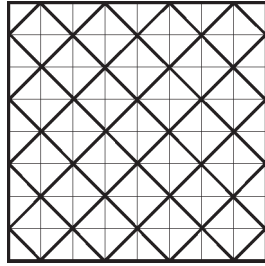


Рис. 5

б) Площадь фигуры, которая целиком находится внутри доски (т.е. никакая ее сторона не выходит на границу доски), не меньше 2; площадь фигуры, которая выходит на границу доски, но не содержит в себе угол доски, не меньше 1; наконец, площадь фигуры, содержащей в себе угол доски, не меньше  $\frac{1}{2}$ . Исходя из этого можно сделать вывод, что суммарное число частей не превышает 41. С другой стороны, можно привести пример ровно с 41 частью (рис.5). Поэтому окончательный ответ: 41.

**ГИПОТЕЗА КАТАЛАНА**

- 1. а) Решений нет. Указание:  $3^x \equiv 3$  или  $1 \pmod{8}$ .
- б) Так как  $3^x \equiv 1 \pmod{4}$ , то  $x = 2t$ ; отсюда  $u = 3^t + 1$  и  $v = 3^t - 1$  – степени двойки. Значит,  $v = (u, v) = 2$ . Ответ: (2, 3).
- в) При четном  $x$  аналогично пункту б). Пусть  $x$  нечетно, тогда  $(z - 1)(z^{x-1} + \dots + 1) = (z - 1)A = 2^y$ , где  $A$  – сумма нечетного числа нечетных слагаемых. Значит,  $A$  нечетно, откуда  $A = 1, x = 1$ . Ответ: (2, 3, 3).
- г) При четном  $x$  число  $n^x + 1$ , где  $n \in \mathbf{N}$ , не делится на 4. При нечетном  $x$  аналогично пункту в) получаем  $z^{x-1} - \dots + 1 = 1$ , откуда  $z^x + 1 = z + 1$  и, значит,  $z = 1$  либо  $x = 1$ . Решений нет.

2. (2, 3, 1) и (3, 2, 3).

3. а) Пусть  $x, y, p \in \mathbf{N}, x > y, p > 1$ . Тогда  $x^p - y^p =$

$$= (x - y)(x^{p-1} + \dots + y^{p-1}) \geq (x - y)(x + y) \geq (x - y) \times 3 \geq 3.$$

б) **Лемма 1.** Пусть  $a \geq 2, p$  – нечетное простое число. Тогда число  $a^p - 1$  имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа  $a - 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разложение

$$a^p - 1 = (a - 1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a^2 + a + 1) = (a - 1)b.$$

Докажем вначале, что числа  $a - 1$  и  $b$  не могут иметь общего делителя  $q$ , отличного от 1 и от  $p$ . Действительно, если  $a - 1$  делится на  $q$ , то и  $a^m - 1$  делится на  $q$  при любом натуральном  $m$ . Значит,  $b = ql + p$ , где  $l$  – некоторое целое число. Поэтому  $b$  делится на  $q$  лишь при  $q = 1$  или  $q = p$ .

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда  $b = p^n$  и  $a - 1$  делится на  $p$ . Докажем, что этот случай невозможен. Поскольку  $b > p$ , достаточно доказать, что  $b$  не делится на  $p^2$ .

Если  $a = p^\alpha k + 1$ , где  $k$  не делится на  $p$ , то

$$\begin{aligned} a^p &= (p^\alpha k + 1)^p = 1 + p^{\alpha+1}k + p \times \frac{p-1}{2} \times p^{2\alpha}k^2 + \dots = \\ &= 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}d, \end{aligned}$$

где  $d$  целое. Отсюда  $a^p - 1 = (p^\alpha k + 1)^p - 1 = p^{\alpha+1}(k + pd)$ . Поскольку  $k$  не делится на  $p$ , то очевидно, что  $b$  делится на  $p$  и не делится на  $p^2$ . (Несколько иное доказательство последнего утверждения см. в решении задачи M2032.) Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $a \geq 2, p$  – нечетное простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств  $a \neq 2$  и  $p \neq 3$ . Тогда  $a^p + 1$  имеет простой делитель, не являющийся делителем числа  $a + 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разложение

$$a^p + 1 = (a + 1)(a^{p-1} - a^{p-2} + \dots + a^2 - a + 1) = (a + 1)b.$$

Докажем вначале, что числа  $a + 1$  и  $b$  не могут иметь общего делителя  $r$ , отличного от 1 и от  $p$ . Действительно, если  $a + 1$  делится на  $r$ , то и  $a^k + 1$  делится на  $r$  при любом нечетном  $k$ ; если же  $k = 2m$ , то  $a^k - 1$  делится на число  $a^2 - 1$ , которое, в свою очередь, делится на  $r$ . Значит,  $b = rl + p$ , где  $l$  – некоторое целое число. Поэтому число  $b$  делится на  $r$  лишь при  $r = 1$  или  $r = p$ .

Таким образом, осталось рассмотреть случай  $b = p^n, a + 1$  делится на  $p$ . Докажем, что этот случай невозможен. Вначале покажем, что  $b > p$ . Имеем  $b \geq a^2 - a + 1 \geq a + 1 \geq p$ . Из условий леммы следует, что среди неравенств этой цепочки есть строгие. С другой стороны, как и в доказательстве леммы 1, можно показать, что  $b$  не делится на  $p^2$ , что и завершает доказательство.

Из лемм 1 и 2 следует, что каждое из чисел  $x^y - 1$  и  $z^t + 1$  имеет не менее двух различных простых делителей.

Заметим, что из леммы 2 сразу следует и единственность решения  $(x, z, t) = (3, 2, 3)$  уравнения  $x^2 - z^t = 1$ , где  $x \in \mathbf{P}, z, t \in \mathbf{N}, t > 1$ . (Ср. это замечание с упражнением 2.)

5. Число  $x^p - 1$  делится на  $p$ , и в силу малой теоремы Ферма  $x - 1$  делится на  $p$ . Следовательно,  $x^{p-1} + \dots + 1$  делится на  $p$ . Вследствие леммы Гензеля (см. решение задачи M2032) эта сумма не делится на  $p^2$ .

6. а)  $3^x = t^p + 1$ , где  $t = y^{z/p}$ . Так как  $n^2 + 1$  при  $n \in \mathbf{N}$  не делится на 3, то  $p$  нечетно. Значит, так как

$$\frac{t^p + 1}{t + 1} \geq \frac{t^3 + 1}{t + 1} = t^2 - t + 1 \geq t + 1 > 1, \text{ то } \left( \frac{t^p + 1}{t + 1}, t + 1 \right) = t + 1 =$$

$$= 3^\alpha, \text{ где } \alpha > 0. \text{ С другой стороны, } 3^\alpha \mid p, \text{ откуда } p = 3,$$

$\alpha = 1$ . Получили  $t + 1 = 3, t = 2$ . Далее см. упражнение 1,б). Ответ: (2, 2, 3).

б) (1, 2, 2).

7. а) 2 кратно  $x, x = 2$ . Далее см. упражнение 1,а). Решений нет.

б) (2, 2, 3). Это – частный случай задачи 6 для 11 класса Московской математической олимпиады 1999 года, которая формулировалась так: решите в натуральных числах уравнение  $(1 + n^k)^l = 1 + n^m$ , где  $l > 1$ . Дадим ее решение.

Поскольку  $1 + n^k \mid 1 + n^m$ , то  $k \mid m$ , и исходное уравнение можно переписать в виде  $u^y - 1 = (u - 1)^z$ , где  $u \geq 3$ .

Пусть  $y = 2^\alpha \geq 4$ . Тогда  $(u - 1)^z$  кратно  $u^2 + 1$ . Значит, если  $u^2 + 1$  кратно  $p$ , то  $u - 1$  кратно  $p$ . Но  $(u^2 + 1, u^2 - 1) \leq 2$ , поэтому  $u^2 + 1 = 2^\beta$ . Однако  $u^2 + 1$  не делится на 4.

Пусть теперь  $y = 2$ . Тогда  $u + 1 = (u - 1)^{z-1}, (u - 1) + 2 = (u - 1)^{z-1}$ , поэтому 2 делится на  $u - 1$ , и  $u - 1 = 2$ .

Пусть, наконец,  $y$  кратно  $p, p > 2$ . Тогда  $u^{p-1} + \dots + 1$  – нечетный делитель числа  $(u - 1)^z$ . Поэтому любой простой делитель  $q$  числа  $u^{p-1} + \dots + 1$  делит и  $u - 1$ ; отсюда  $q = p$ , и  $u^{p-1} + \dots + 1 = p^\alpha$ . Из леммы Гензеля следует, что  $\alpha = 1$ ; в то же время, очевидно,  $u^{p-1} + \dots + 1 > 1 + \dots + 1 = p$ . Противоречие.

в) Сразу следует из пунктов а) и б).  
 9. Имеем  $x - 1 = z^{t-1}a^t$ , где  $z, t \geq 5$ . Так как, кроме того,  $z \neq t$ , то либо  $z \geq 5$  и  $t \geq 7$ , либо  $z \geq 7$  и  $t \geq 5$ . Оценим снизу  $a$ . По теореме Касселса  $x = z^{t-1}a^t + 1$  кратно  $t$ . По малой теореме Ферма  $z^{t-1} \equiv 1 \pmod{t}$ ,  $a^t \equiv a \pmod{t}$ . Значит, число  $a + 1$  кратно  $t$ ,  $a \geq t - 1$ . Таким образом,

$$x > z^{t-1}(t-1)^t \geq \min\{5^6 \times 6^7, 7^4 \times 4^5\} > 2 \times 10^6.$$

Аналогичными рассуждениями легко показать, что  $y > 10^7$ .

11. Так как  $(2k+1)(2k-1) = z^m$  и  $(2k+1, 2k-1) = 1$ , то  $2k+1 = u^m$ ,  $2k-1 = v^m$ , где  $u, v \in \mathbf{N}$ . Отсюда при  $m > 1$  было бы  $2 = u^m - v^m \geq 3$ .

12. Если  $m > 1$ , то  $x^m$  кратно 4.

13. а) Вследствие упражнения 10 число  $n + 1$  четно. Воспользуйтесь упражнением 11. (Второй способ: воспользуйтесь упражнениями 11 и 12.)

б) Вследствие упражнения 10 число  $n$  нечетно. Воспользуйтесь упражнением 12.

**МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ**

1.  $(-\infty; \frac{1}{8}]$ . 2.  $[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}]$ . 3.  $[\frac{3}{13}; 1]$ . 4.  $[\frac{8-2\sqrt{2}}{7}; \frac{8+2\sqrt{2}}{7}]$ .
5.  $[-\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}]$ . 6.  $[-18; 18]$ . 7.  $[0; \frac{3\sqrt{35}}{35}]$ .
8.  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . 9.  $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ . 10.  $(-\infty; 1]$ . 11.  $[0; \frac{16}{3}]$ .
12.  $[-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$ . 13.  $[2; \frac{17}{4}]$ . 14.  $(-2; \frac{1}{4}]$ .
15.  $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$ . 16.  $(-\infty; \frac{3}{4}]$ . 17.  $[\frac{144}{13}; 117], [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$ .

**ЗАДАЧИ LXX МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ**

6 класс

1. На первом канале.
2. Тройка. Разложим число 2007 на простые множители:

$$2007 = 3 \times 3 \times 223.$$

Отсюда можно было бы сделать вывод, что отметки Вовочки – это две двойки и три тройки. Но надо еще доказать, что нет других вариантов отметок. Посмотрим, как еще можно разложить 2007 на множители:  $2007 = 9 \times 223 = 3 \times 669$ . Поскольку отметки больше 5 не бывает, эти разложения числа 2007 не могли возникнуть из Вовочкиных отметок. Так как троек у Вовочки больше, чем двоек, и последняя отметка, как ни переставляй множители, тройка, можно надеяться, что тройку в четверти он получит.

3. 700 золотых монет. За книгу «Три поросенка-2» каждый автор должен получить четверть гонорара. Но так как Наф-Наф свою долю уже забрал, Волку причитается  $1/3$  остатка.

За книгу «Красная шапочка-2» ему также полагается  $1/3$  гонорара. Поэтому всего он должен получить треть переданной ему суммы.

4. План города может быть, например, таким, как на рисунке 6.

5. Из предложенных фигурок можно сложить четыре различные фигуры, имеющие ось симметрии. Две приведены на рисунке 7. У одной из них ось симметрии вертикальная, а у другой проходит по диагонали. Это

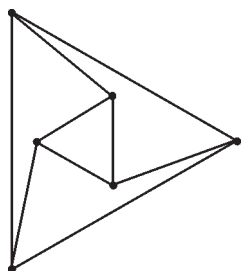


Рис. 6

не случайно – ось симметрии фигуры, нарисованной по клеточкам, может быть либо параллельна сторонам клеток, либо идти под углом  $45^\circ$  к ним. Попробуйте найти остальные два решения.

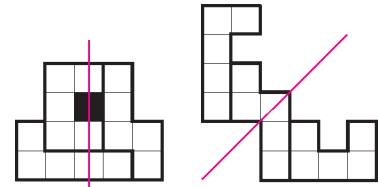


Рис. 7

6. а) Да; б) да. а) Пусть все царевны назовут царевнами Кошечевых дочек (рис.8). Тогда Кошечевых дочек назовут не менее трех раз, а царевен – не более чем дважды. Так Иван их и отличит. Любое из решений пункта б), конечно, годится и для пункта а).

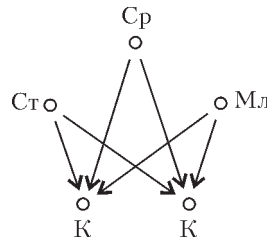


Рис. 8

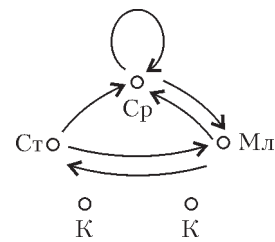


Рис. 9

б) Пусть та царевна, которая будет отвечать Кошечу первой, назовет среднюю и младшую из царевен, вторая по счету – старшую и младшую, последняя – старшую и среднюю. Тогда дочери Кошечу – те две девушки, которых не назвали трое остальных (рис.9). Ошибки быть не может, ведь каждую царевну называют как минимум двое. Теперь Иван знает, кто царевны. Старшая из них – та, которую не назвала первая из отвечавших царевен. Средняя – та, которую не назвала вторая, а младшая – оставшаяся.

7 класс

1. 7 этажей. Пусть с шестого этажа Тане надо было спуститься на  $n$  этажей. Тогда Таня прошла «лишний путь» вверх до последнего этажа и обратно до шестого. Длина лишнего пути  $1,5n - n = 0,5n$  этажей. Половину этого лишнего пути Таня шла вверх, а половину – вниз. Значит, вверх она поднялась на  $n/4$  этажей. Если она поднялась на один этаж ( $n/4 = 1$ ), то Таня живет на 4 этажа ниже Даши и в доме 7 этажей. Если же  $n/4$  равно 2 или больше, то Тане пришлось бы спуститься с шестого этажа минимум на 8 этажей вниз, что невозможно.

2. 11 часов 40 минут. Во время разговора энергия аккумулятора расходуется в  $\frac{210}{6} = 35$  раз быстрее, чем в то время, когда разговор не ведется. Пусть Алена проговорила  $x$  часов. Тогда энергии аккумулятора осталось на  $6 - x$  часов разговора или на  $35(6 - x)$  часов ожидания. По условию это время также равно  $x$  часов ожидания, поэтому  $35(6 - x) = x$ , откуда  $x = \frac{35 \times 6}{36} = \frac{35}{6}$  часов, т.е. 5 ч 50 мин. И значит, вся поездка продолжалась 11 ч 40 мин.

Примечание. Ответом в этой задаче является среднее гармоническое чисел 6 и 210 (средним гармоническим чисел  $a$  и  $b$  называется число

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

3. См. рис.10.

4. а) Нет, не всегда;

б) да, всегда.

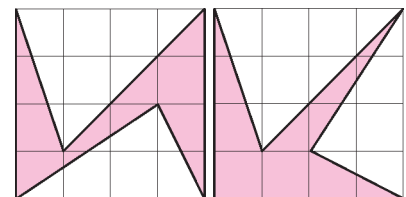


Рис. 10

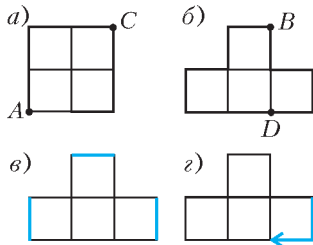


Рис. 11

а) Всегда, когда Буратино приближается к перекрестку  $A$ , он удаляется от перекрестка  $C$  (рис.11,а). Поэтому Буратино не сможет различить следующие две ситуации:

- 1) клад закопан на перекрестке  $A$ , и радио говорит правду;
- 2) клад закопан на перекрестке  $C$ , и радио лжет.

б) Заметим, что если Буратино

знает, что радио говорит правду, то он сможет найти клад. Действительно, двигаясь по улице  $BD$  сверху вниз (рис. 11,б), он найдет горизонтальную улицу, на которой лежит клад. Затем, двигаясь по этой горизонтальной улице слева направо, он найдет точное местоположение клада. Если же Буратино знает, что радио лжет, то он найдет клад, действуя тем же способом, но заменяя указания радио на противоположные.

Пусть вначале Буратино предположит, что радио говорит правду. Действуя, как описано выше, он найдет точку  $T$ , в которой может быть зарыт клад, либо поймет, что радио лжет. Аналогично, предположив, что радио лжет, Буратино найдет точку  $L$ , в которой предположительно лежит клад, либо сможет установить, что радио говорит правду. Итак, проделав это, Буратино либо уже установил, говорит ли радио правду, либо нашел две точки  $T$  и  $L$ , в одной из которых точно находится клад.

Рассмотрим на плане города три отрезка (рис.11,в). Хотя бы на одном из них не лежит ни  $T$ , ни  $L$ . Поэтому Буратино может встать в один из концов этого отрезка и совершить переход в соседнюю точку, не лежащую на этом отрезке (рис.11,г). При этом он приблизится как к  $T$ , так и к  $L$ . Таким образом Буратино определит, лжет ли радио, и узнает, где находится клад.

### 8 класс

1. 500 человек.
2. Да. Число  $\sqrt{N}$  лежит на числовой оси между какими-то подряд идущими натуральными числами  $b$  и  $b + 1$ . Тогда число  $N$  лежит между  $b^2$  и  $(b + 1)^2$ .

Середина отрезка  $[b^2; (b + 1)^2]$  – это полусумма его концов, т.е. число  $b^2 + b + 1/2$ . Так как это число нецелое,  $N$  не может попасть точно на середину.

Если  $N$  лежит справа от середины, то

$$N > b^2 + b + 1/2 = (b + 1/2)^2 + 1/4, \text{ откуда } \sqrt{N} > b + 1/2, \text{ т.е.}$$

$\sqrt{N}$  ближе к  $b + 1$ , чем к  $b$ .

Если же  $N$  лежит слева от середины  $b^2$ , тогда

$$N < b^2 + b + 1/2 \text{ и, так как } N \text{ натуральное,}$$

$$N \leq b^2 + b = (b + 1/2)^2 - 1/4, \text{ откуда } \sqrt{N} < b + 1/2. \text{ Значит,}$$

$\sqrt{N}$  ближе к  $b$ , чем к  $b + 1$ .

3. 15. Каждая команда сыграла 15 игр и могла набрать самое большее  $15 \times 3 = 45$  очков. Значит, у успешной команды не меньше 23 очков.

Пусть было  $n$  успешных команд. Тогда суммарное количество набранных очков не меньше  $23n$ . С другой стороны, в каждой игре разыгрывается не более 3 очков, а всего было сыграно

$$\frac{16 \times 15}{2} \text{ игр. Поэтому всего было разыграно не более}$$

$$3 \times \frac{16 \times 15}{2} = 360 \text{ очков. Значит, } 23n \leq 360, \text{ откуда } n < 16.$$

Покажем, что в чемпионате могло быть 15 успешных команд. Пронумеруем команды. Пусть команда номер 16 проигрывает всем остальным. Расположим номера остальных команд (чис-

ла от 1 до 15) по кругу.

Пусть каждая из этих команд выиграет у следующих по кругу 7 команд (а остальным проиграет).

Тогда 15 команд выиграют по 8 игр и наберут по 24 очка.

4. Пусть  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  (рис.12), тогда  $I$  лежит на биссектрисе угла  $A$ . Так как треугольник  $AMN$  равнобедренный, прямая  $IA$  является в нем не только биссектрисой, но и высотой, поэтому  $IA \perp MN$ . По условию  $KX \perp MN$ , а значит,  $IA$  и  $KX$  параллельны.

Заметим, что  $IK \perp BC$ , откуда следует, что  $IK$  и  $AC$  параллельны. Значит, четырехугольник  $A XXI$  – параллелограмм, т.е.  $AX = KI$ . Но в прямоугольнике  $KIMC$  стороны  $IK$  и  $IM$  равны (как радиусы вписанной окружности), а значит,  $KIMC$  – квадрат, откуда  $CK = KI = AX$ .

5. Может. Фукс за 52 тура называет 52<sup>2</sup> карт – в каждом туре все карты по разу в одном и том же порядке, после чего говорит «стоп». Заметим, что всякий раз карты передвигаются в одном направлении: если передвинута карта  $a$ , то следующей будет передвинута карта  $b$  по другую сторону от свободного места (она будет названа раньше  $a$ ). В каждом туре хотя бы одна карта сдвинется, значит, сдвигов не менее 52, и каждая карта со своего места уйдет. С другой стороны, каждая карта сдвинулась не более 52 раз, поэтому полный круг (53 хода) она сделать не успеет и на свое место не вернется. Есть много других верных алгоритмов. Например, Фуксу достаточно назвать все карты в некотором определенном порядке 51 раз (докажите!).

6. 30°. Пусть  $O, K, L$  – середины отрезков  $BC, AC$  и  $BD$  соответственно,  $P$  – точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ . Точки  $K, L$  различны (иначе  $ABCD$  – ромб и  $\angle BMC < \angle BPC = 90^\circ$ ).

Поскольку углы  $BKC, BMC$  и  $BLC$  прямые, точки  $K, M, L$  лежат на окружности с диаметром  $BC$ . Хорда  $KM$  равна  $\frac{2}{2}CD = OC$  как средняя линия треугольника  $ACD$ , поэтому треугольник  $KOM$  равносторонний и  $\angle MOK = 60^\circ$ . Аналогично,  $\angle MOL = 60^\circ$ , поэтому  $\angle KOL = 120^\circ$ . Вписанный угол  $KBL$  опирается на дугу  $KL$  или ее дополнение, поэтому равен  $60^\circ$  или  $120^\circ$ . В любом случае это означает, что в прямоугольном треугольнике  $BKP$  угол  $B$  равен  $60^\circ$  и поэтому  $\angle BPK = 30^\circ$ .

*Замечание.* Решение в равной мере подходит для выпуклого и невыпуклого четырехугольников.

### 9 класс

1. Два раза. Пусть в каком-то году возникло описанное совпадение. Если номер олимпиады двузначный, то его сумма с числом, образованным последними двумя цифрами года, делится на 11 (сумма двух чисел, состоящих из цифр  $a$  и  $b$ , равна  $11(a + b)$ ). Поскольку каждый год эта сумма увеличивается на 2, событие может повторяться не чаще чем через 11 лет. И действительно, 81-я и 92-я олимпиады пройдут в 2018 и 2029 годах.

Если номер олимпиады трехзначный, то предпоследние цифры номера и года совпадают. Поэтому предпоследней цифрой их разности может быть только 0 или 9. Но разность года

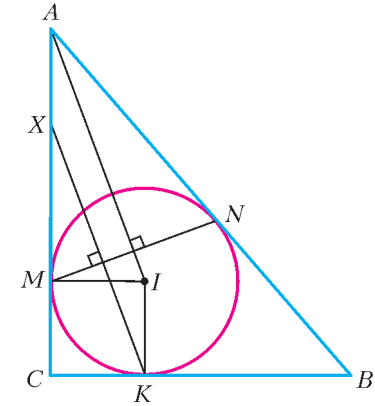


Рис. 12

проведения олимпиады и ее номера всегда будет равна 1937. Противоречие.

Если номер олимпиады четырехзначный, то суммы цифр номера и года совпадают. Поскольку любое число дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр, разность года и номера должна делиться на 9. Но остаток при делении на 9 числа 1937 равен 2. Противоречие.

Заметим, что и в дальнейшем такая ситуация наблюдаться не будет.

2.  $\frac{ab}{c}$ . Пусть  $l_0$  – ордината точки пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ . Тогда прямая  $AB$  задается уравнением вида  $y = kx + l_0$ , поэтому числа  $a, b$  являются корнями уравнения

$x^2 - kx + l_0 = 0$ . По теореме Виета их произведение равно  $-l_0$ . Аналогично, произведение абсцисс точек  $C$  и  $D$  равно  $-l_0$ , и, следовательно, абсцисса точки  $D$  равна  $\frac{ab}{c}$ .

3. (2; 3), (3; 5; 7). Пусть  $d$  – разность прогрессии. Если  $d = 1$ , то в прогрессии есть четные числа. Поскольку единственное четное простое число – это 2, получаем прогрессию (2; 3).

Если  $d = 2$ , то три члена прогрессии  $a, a + 2$  и  $a + 4$  дают при делении на 3 попарно различные остатки. Поэтому один из них делится на 3 и, будучи простым числом, равен 3. Отсюда получаем прогрессию (3; 5; 7).

Пусть  $d > 2$ . Последние  $d - 1$  членов прогрессии дают попарно различные остатки при делении на  $d - 1$ . Поэтому один из них (обозначим его  $a$ ) делится на  $d - 1$ . Так как  $d - 1 > 1$  и  $a$  – простое число, то  $a = d - 1 < d$ . Но количество членов прогрессии больше  $d$ , поэтому  $a - d$  принадлежит прогрессии и, значит, положительно. Противоречие.

4. Нет. Рассмотрим полукруг с центром  $O$  и радиусом 1. Данный треугольник можно параллельно перенести так, что одна из его вершин попадет в некоторую точку  $X$ , лежащую на прямой  $l$ , которая содержит диаметр полукруга, а две другие окажутся по ту же сторону от  $l$ , что и полукруг. Теперь после переноса на вектор  $XO$  одна вершина треугольника будет лежать в центре полукруга, а две другие – на его окружности.

Условию задачи удовлетворяет и общая часть двух кругов единичного радиуса, расстояние между центрами которых также равно 1.

5. Если две команды набрали поровну очков, то разность между количествами ничьих у них кратна трем. Количество ничьих находится в пределах от 0 до  $n - 1$ . Поэтому количество групп, в каждой из которых команды имеют поровну выигрышей, ничьих и поражений, не превосходит  $k = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ .

Значит, некоторая группа состоит не менее чем из трех команд.

Пусть все группы состоят из трех или менее команд. Тогда групп ровно  $k$  (иначе  $n < 3k - 2$  и  $\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor < k$  – противоречие). Рассмотрим группы с наименьшим и наибольшим количеством ничьих.

Если  $n = 3k - 2$ , то у команд первой группы количество ничьих равно 0, а у команд второй  $3k - 3$ . Значит, команды второй группы свели вничью все игры, в том числе с командами первой группы, у которых нет ничьих. Противоречие.

Если  $n = 3k - 1$  и у команд первой группы по  $l$  ничьих, то у команд второй группы по  $l + 3k - 3$  ничьих, т.е. по  $1 - l$  результативных встреч. Если  $l = 1$ , то вторая группа может содержать только одну команду, так как две команды сыграли бы вничью с командой первой группы, у которой только одна ничья. Если же  $l = 0$ , то первая группа может содержать лишь одну команду, так как две команды имели бы результа-

тивную игру с командой второй группы, у которой результативная игра только одна. Таким образом, одна из этих групп содержит лишь одну команду. Но тогда оставшиеся команды нельзя разбить на  $k - 1$  группу, каждая из которых содержит не более трех команд.

Если  $n = 3k$ , то все группы должны содержать ровно по 3 команды. При этом если у команд первой группы по  $l$  ничьих, то у команд второй группы по  $2 - l$  результативных игр.

Поэтому друг против друга команды этих групп проводят не более чем  $3l + 3(2 - l) = 6$  игр. Противоречие.

б) Нетрудно составить турнир 10 команд, три из которых имеют по 1 победе и 8 ничьих, четыре – по 2 победы, 2 поражения и 5 ничьих, и еще три – по 3 победы, 4 поражения и 2 ничьих (рис.13).

Докажем, что случай  $n < 10$  невозможен. Так как не все команды имеют поровну побед, ничьих и поражений, найдутся команды, которые выиграли больше встреч, чем проиграли, и команды, которые проиграли больше, чем выиграли. Предположим сначала, что в каждой из этих групп команд количества побед и поражений отличаются на 1, т.е. в одной группе команды одержали  $x$  побед, потерпели  $x - 1$  поражение и  $n - 2x$  встреч завершили вничью, а в другой эти числа равны  $y - 1, y$  и  $n - 2y$  соответственно. Тогда, приравняв набранные командами очки, получаем, что  $x = y - 3$ . Так как  $n - 2y \geq 0$ , то  $n - 2x \geq 6$ , а поскольку  $x \geq 1$ , получаем, что  $n \geq 8$ . Пусть теперь есть команды, у которых разность между количеством побед и поражений по модулю больше 1. Аналогичные рассуждения показывают, что существуют команды, завершившие вничью по крайней мере 9 встреч. Таким образом, неравенство  $n \geq 8$  выполнено всегда, а случай  $n < 10$  возможен, только когда разность между количеством побед и поражений у любой команды по модулю не превышает 1. Предположим, что  $n = 8$ . Тогда, как показано выше, есть  $k$  команд, у которых побед на одну больше, чем поражений,  $k$  команд, у которых побед на одну меньше, чем поражений, и  $8 - 2k$  команд, у которых побед и поражений поровну. При этом количество ничьих у команд первой группы на 6 больше, чем у команд второй. Это возможно в единственном случае, когда эти команды имеют одну победу и 6 ничьих. Соответственно, у команд второй группы по 3 победы и 4 поражения. Команды первой группы против команд второй проводят  $k^2$  встреч, среди которых нет ничейных и не больше чем  $k$  результативных (по одной на каждую команду первой группы). Значит,  $k^2 \leq k$ , т.е.  $k = 1$  и  $n - 2k = 8 - 2k > 4$  (такой турнир существует). Аналогично доказывается, что  $k \leq 2$  при  $n = 9$ , откуда  $n - 2k = 9 - 2k > 4$ .

	1	1	1	1	1	1	3	1	1
1		1	1	1	1	1	1	3	1
1	1		1	1	1	1	1	1	3
1	1	1		0	1	1	0	3	3
1	1	1	3		1	1	0	0	3
1	1	1	1	1		3	3	0	0
1	1	1	1	1	0		3	3	0
0	1	1	3	3	0	0		3	0
1	0	1	0	3	3	0	0		3
1	1	0	0	0	3	3	3	0	

Рис. 13

10 класс

1.  $\frac{1}{4}$ . Обозначим вершины квадрата через  $A, B, C, D$ , так что  $L$  лежит на  $AB$ ,  $M$  лежит на  $BC$ ,  $N$  лежит на  $CD$ ,  $K$  лежит на  $AD$ . Пусть  $O$  – точка пересечения  $KM$  и  $LN$ . Обозначим длины отрезков  $AL$  и  $AK$  через  $x$  и  $y$  соответственно. Тогда по теореме Пифагора  $1 - x - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Отсюда возведением в квадрат получаем  $1 = 2x + 2y - 2xy$ . Так как  $AD \parallel LN \parallel BC$  и  $AB \parallel KM \parallel CD$ , то  $OL = y$  и  $OK = x$ . Тогда  $OM = 1 - x$  и  $ON = 1 - y$ . Значит,  $NC = 1 - x$  и  $MC = 1 - y$ . Поэтому площадь треугольника  $NMC$  равна

$$\frac{1}{2} NC \cdot MC = \frac{1}{2}(1-x)(1-y) = \frac{1}{2}(1-x-y+xy) = \frac{1}{4}.$$

2. Нет. Пусть  $A, B, C, D, E$  – последовательные вершины внешнего пятиугольника,  $A', B', C', D', E'$  – соответствующие вершины внутренней звезды. Покажем, что каждому цвету, в который покрашена хотя бы одна сторона внешнего пятиугольника, отвечают два из образующих звезду отрезков того же цвета. Из этого вытекает решение задачи: если на контуре пятиугольника встречаются только 2 цвета, то они чередуются, что невозможно из-за нечетности числа 5. Если же на контуре наблюдаются все три цвета, то отрезков, образующих звезду, обнаружится не менее 6 – хотя бы по два отрезка каждого цвета, а их всего 5. Итак, рассмотрим произвольную сторону внешнего пятиугольника, скажем,  $AB$ . Пусть она синяя. Тогда отрезки  $AA'$  и  $BB'$  не синие. Остается проверить, что синими являются один отрезок звезды, примыкающий к вершине  $A'$ , и один отрезок, примыкающий к вершине  $B'$ . Но два отрезка звезды, исходящих из вершины  $A'$ , отличаются по цвету от отрезка  $AA'$  (не синего) и, кроме того, различны по цвету. Значит, среди них есть синий. Точно так же рассматриваются отрезки звезды, исходящие из вершины  $B'$ .

*Замечание.* Граф, описанный в задаче, это знаменитый граф Петерсона.

3. Так как  $\angle XAB = \angle XBC$ , то все точки  $X$  лежат на одной окружности  $\omega$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Опустим на прямую  $BP$  перпендикуляр  $OY$ . Из перпендикулярности  $PX$  и  $OX$  следует, что точки  $Y, O, P, X$  лежат на одной окружности. Отсюда получаем равенства ориентированных углов:  $\angle BYX = \angle PUX = \angle POX = \angle BAX$ . Значит, точка  $Y$  лежит на окружности  $\omega$ . Поэтому все точки  $P$  лежат на прямой, проходящей через точку  $B$  и точку пересечения  $\omega$  с окружностью, построенной на  $OB$  как на диаметре.

4. Верно. Обозначим наши операции через  $f(x) = \frac{1+x}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1-x}{x}$ . Докажем сначала, что, последовательно применяя их, мы можем получить операции, обратные к  $f$  и  $g$ .

Имеем  $f(g(f(x))) = -x$  и  $f(g(f(g(f(x)))))) = \frac{1}{1+x}$  при

$x \neq -1$ . Поэтому  $f(g(f(g(f(x)))))) = x$  при  $x \neq -1$  и

$f(g(f(g(f(g(x)))))) = x$  при  $x \neq -1$ . Далее, из 2 можно получить  $-2$  (и наоборот). Кроме того,  $f(-2) = 1/2$ ,  $g(1/2) = 1$ .

Значит, можно получить 1 из 2. Так как  $g(-1) = -2$ , а из  $-2$  можно получить 2, можно получить 2 из  $-1$ . Так как  $g(2) = -1/2$  и  $f(-1/2) = -1$ , можно получить  $-1$  из  $-2$ . Итак, обратимость доказана. Теперь достаточно доказать, что из единицы можно получить все положительные рациональные числа. Докажем это индукцией по сумме числителя и знаменателя несократимой дроби, представляющей наше рациональное число  $\frac{m}{n}$ .

База индукции для  $m+n=2$  очевидна. Допустим, что при  $m+n < k$  число  $\frac{m}{n}$  можно получить из единицы. Докажем, что тогда и при  $m+n=k$  число  $\frac{m}{n}$  получается из единицы.

Если  $m > n$ , то  $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{n}{m-n}}$  и  $n+(m-n) = m < m+n$ , по-

этому число  $\frac{n}{m-n}$  можно получить по предположению индукции.

Если же  $m < n$ , то  $\frac{m}{n} = \frac{1}{1 + \frac{n-m}{m}}$  и  $(n-m)+m = n < m+n$ ,

поэтому число  $\frac{n-m}{m}$  можно получить по предположению индукции.

Значит, в обоих случаях число  $\frac{m}{n}$  можно получить из единицы, что и требовалось.

### 11 класс

1. Может; наибольшее возможное значение равно 9. Если секторы занумерованы в следующем порядке:

1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 20,

то наименьшая из разностей между соседними номерами равна 9. Эта величина не может быть больше 9, так как в противном случае при любой нумерации рядом (и слева, и справа) с сектором номер 10 может находиться только сектор с номером 20, что невозможно.

2. 4014. Преобразуем второе уравнение:

$$4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4 \Leftrightarrow 4^x - 2 + 4^{-x} = 2(1 + \cos ax) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2^{-x})^2 = 4 \cos^2 \frac{ax}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\frac{x}{2}} - 4^{-\frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{ax}{2}, \\ 4^{-\frac{x}{2}} - 4^{\frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{ax}{2}. \end{cases}$$

Оба последних уравнения сводятся к первому уравнению из условия задачи заменами  $x = 2y$  и  $x = -2z$  соответственно.

Поэтому каждое из этих двух уравнений имеет 2007 корней.

Нетрудно проверить, что общего корня у них нет. Следовательно, второе уравнение из условия задачи имеет  $2 \times 2007 = 4014$  корней.

3. 6, 42, 1806.

Пусть  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$  ( $k \geq 2$ ) – произведение нескольких различных простых чисел  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ , удовлетворяющее условию задачи. Поскольку по условию  $N$  кратно четному числу  $p_2 - 1$ , оно само четно и  $p_1 = 2$ . Число

$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$  имеет единственный делитель  $p_1$  из интервала  $(1; p_2)$ , но  $p_2 - 1$  также принадлежит этому интервалу, значит,  $p_2 - 1 = p_1 = 2$ . Таким образом,  $p_2 = 3$ , а  $N$  может принимать значение  $2 \times 3 = 6$ .

Если  $k \geq 3$ , то по условию число  $p_3 - 1$ , принадлежащее интервалу  $(p_2; p_3)$ , является делителем числа  $N$ . Этому интервалу может принадлежать единственный делитель  $N$  – число  $p_1 \times p_2 = 6$ . Следовательно,  $p_3 = p_1 \times p_2 + 1 = 7$ . Число  $2 \times 3 \times 7 = 42$  удовлетворяет условию задачи.

Если  $k \geq 4$ , то по условию четное число  $p_4 - 1$ , принадлежащее интервалу  $(p_3; p_4)$ , также является делителем  $N$ . Из четных делителей числа  $N$  этому интервалу могут принадлежать лишь числа  $p_1 \times p_3 = 14$  и  $p_1 \times p_2 \times p_3 = 42$ . Число

$15 = p_1 \times p_3 + 1$  является составным, значит,  $p_4 = p_1 \times p_2 \times p_3 + 1 = 43$ . Число  $2 \times 3 \times 7 \times 43 = 1806$  удовлетворяет условию задачи.

Если  $k \geq 5$ , то по условию четное число  $p_5 - 1$ , принадлежащее интервалу  $(p_4; p_5)$ , также должно являться делителем  $N$ . Из четных делителей числа  $N$  этому интервалу могут принадлежать лишь числа  $p_1 \times p_4 = 86$ ,  $p_1 \times p_2 \times p_4 = 258$ ,  $p_1 \times p_3 \times p_4 = 602$  и  $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = 1806$ . Каждое из чисел 87, 259, 603, 1807 является составным. Значит, у числа  $N$  не может быть более четырех различных простых делителей.

4. 5. По теореме синусов для треугольников  $SA_kO$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) имеем (рис.14)

$$\sin \angle SOA_k = \frac{SA_k}{SO} \sin \angle SA_kO.$$

Так как правая часть этого равенства не зависит от выбора  $k = 1, 2, \dots, n$ , величина  $\sin \angle SOA_k$  также не зависит от этого выбора. Следовательно, при различном выборе  $k$  величина угла  $\angle SOA_k$  может принимать не более двух различных значений, каждое из которых вместе с длинами  $SO$ ,  $SA_k$  и углом  $\angle SOA_k$  однозначно определяет треугольник  $SA_kO$ .

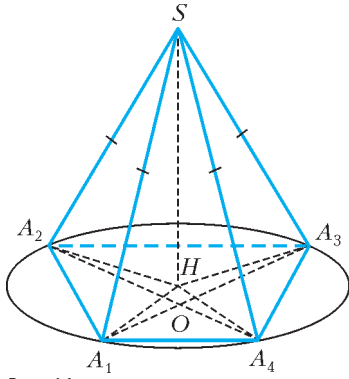


Рис. 14

$A_1A_2A_3$  окружности, т.е.  $H = O$ .

При  $n = 4$  из условия не следует, что  $SO$  – высота пирамиды. Например, если  $A_1A_2A_3A_4$  – равнобокая трапеция,  $O$  – точка пересечения ее диагоналей,  $H$  – центр описанной около нее окружности, то для пирамиды  $SA_1A_2A_3A_4$ , в которой  $SH$  является высотой к основанию, выполнены все условия задачи. Действительно, во-первых,  $SA_1 = SA_2 = SA_3 = SA_4$  в силу равенства (по двум катетам) треугольников  $SHA_1$ ,  $SHA_2$ ,  $SHA_3$  и  $SHA_4$ , а во-вторых,  $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \angle SA_3O = \angle SA_4O$  в силу равенства (по трем сторонам) равнобедренных треугольников  $SA_1A_3$  и  $SA_2A_4$ . При этом  $H \neq O$ . При  $n \leq 4$  из условия тем более не следует, что  $SO$  – высота пирамиды (соответствующий пример получается из предыдущего рассмотрения его части – пирамиды  $SA_1A_2A_3$ ).

5.  $2n - 4$ . Пусть из некоторой раскраски  $P$  можно указанными преобразованиями сделать полностью черный квадрат. Тогда те же преобразования в обратном порядке переведут полностью черный квадрат в раскраску  $P$ . При каждом из этих преобразований одинаково раскрашенные строки или противоположно раскрашенные строки (т.е. строки, соответствующие клетки которых раскрашены в разные цвета) переходят также в одинаково или противоположно раскрашенные. Следовательно, все строки раскраски  $P$  были одинаково или противоположно раскрашены. Наоборот, из каждой раскраски с этим свойством можно указанными преобразованиями сделать сначала все строки одинаковыми, а затем – и полностью черными. Каждая такая раскраска удовлетворяет одному из следующих условий.

- 1) В каждой строке все клетки одного цвета. Тогда из условия задачи следует, что в первой и последней строках все клетки черные, т.е. всего черных клеток не менее  $2n$ .
- 2) В каждой строке есть не менее двух черных клеток, т.е. всего черных клеток не менее  $2n$ .
- 3) Существует строка, в которой ровно одна черная клетка. Тогда либо первая, либо последняя строка с ней не совпадает и, следовательно, противоположна ей, т.е. содержит  $n - 1$  черную клетку. В этом случае общее число черных клеток не меньше

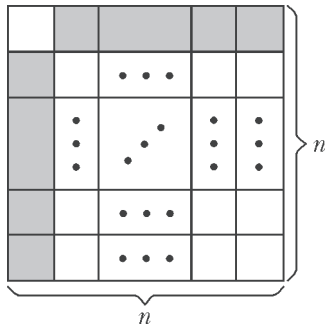


Рис. 15

Если  $n \geq 5$ , то среди треугольников  $SA_kO$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ) есть по крайней мере три одинаковых. Пусть это, для определенности, треугольники  $SA_1O$ ,  $SA_2O$  и  $SA_3O$ . Так как  $OA_1 = OA_2 = OA_3$ , точка  $O$  – центр описанной около треугольника  $A_1A_2A_3$  окружности. Пусть  $SH$  – высота пирамиды  $SA_1A_2A_3$ . Тогда точка  $H$  также является центром описанной около

$A_1A_2A_3$  окружности, т.е.  $H = O$ . При  $n = 4$  из условия не следует, что  $SO$  – высота пирамиды. Например, если  $A_1A_2A_3A_4$  – равнобокая трапеция,  $O$  – точка пересечения ее диагоналей,  $H$  – центр описанной около нее окружности, то для пирамиды  $SA_1A_2A_3A_4$ , в которой  $SH$  является высотой к основанию, выполнены все условия задачи. Действительно, во-первых,  $SA_1 = SA_2 = SA_3 = SA_4$  в силу равенства (по двум катетам) треугольников  $SHA_1$ ,  $SHA_2$ ,  $SHA_3$  и  $SHA_4$ , а во-вторых,  $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \angle SA_3O = \angle SA_4O$  в силу равенства (по трем сторонам) равнобедренных треугольников  $SA_1A_3$  и  $SA_2A_4$ . При этом  $H \neq O$ . При  $n \leq 4$  из условия тем более не следует, что  $SO$  – высота пирамиды (соответствующий пример получается из предыдущего рассмотрения его части – пирамиды  $SA_1A_2A_3$ ).

5.  $2n - 4$ . Пусть из некоторой раскраски  $P$  можно указанными преобразованиями сделать полностью черный квадрат. Тогда те же преобразования в обратном порядке переведут полностью черный квадрат в раскраску  $P$ . При каждом из этих преобразований одинаково раскрашенные строки или противоположно раскрашенные строки (т.е. строки, соответствующие клетки которых раскрашены в разные цвета) переходят также в одинаково или противоположно раскрашенные. Следовательно, все строки раскраски  $P$  были одинаково или противоположно раскрашены. Наоборот, из каждой раскраски с этим свойством можно указанными преобразованиями сделать сначала все строки одинаковыми, а затем – и полностью черными. Каждая такая раскраска удовлетворяет одному из следующих условий.

- 1) В каждой строке все клетки одного цвета. Тогда из условия задачи следует, что в первой и последней строках все клетки черные, т.е. всего черных клеток не менее  $2n$ .
- 2) В каждой строке есть не менее двух черных клеток, т.е. всего черных клеток не менее  $2n$ .
- 3) Существует строка, в которой ровно одна черная клетка. Тогда либо первая, либо последняя строка с ней не совпадает и, следовательно, противоположна ей, т.е. содержит  $n - 1$  черную клетку. В этом случае общее число черных клеток не меньше

$$(n - 1) \times 1 + 1 \times (n - 1) = 2n - 2.$$

Таким образом, в любом случае в раскраске  $P$  должно быть не менее  $2n - 2$  черных клеток. Значит, число клеток, которые нужно предварительно перекрасить, должно быть не меньше  $2n - 4$ . На рисунке 15 изображен квадрат  $n \times n$ , все строки которого раскрашены одинаково или противоположно, а

число предварительно перекрашенных в черный цвет клеток равно  $2n - 4$ .

6. Пусть  $\gamma_A$  и  $\gamma_C$  – окружности, описанные около треугольников  $AHC'$  и  $CHA'$  соответственно (рис. 16). Так как точки  $B$  и  $H$  симметричны относительно средней линии  $A'C'$

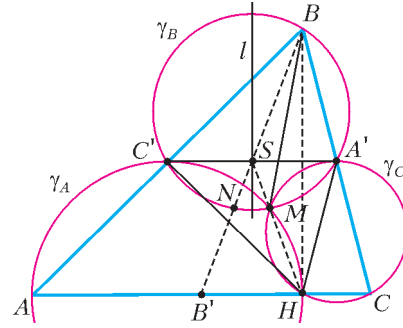


Рис. 16

треугольника  $ABC$ , то  $C'H = C'B = C'A$ ,  $A'H = A'B = A'C$ , т.е. треугольники  $AHC'$  и  $CHA'$  равнобедренные. Поэтому  $A'C'$  ( $\parallel AC$ ) – общая касательная к окружностям  $\gamma_A$  и  $\gamma_C$ . Пусть  $S$  – точка пересечения прямых  $HM$  и  $A'C'$ , тогда  $SC'^2 = SM \times SH = SA'^2$ , т.е.  $S$  – середина  $A'C'$  и  $\angle CBB' = \angle CBS$ .

Пусть  $\gamma_B$  – окружность, описанная вокруг треугольника  $BA'C'$ . Покажем, что точка  $M$  лежит на этой окружности. Действительно, если  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы треугольника  $ABC$ , то

$$\begin{aligned} \angle C'MA' &= 2\pi - \angle C'MH - \angle A'MH = \\ &= 2\pi - (\pi - \alpha) - (\pi - \gamma) = \alpha + \gamma = \pi - \beta. \end{aligned}$$

Пусть  $l$  – серединный перпендикуляр к  $A'C'$ . Окружность  $\gamma_B$  симметрична относительно  $l$ . Так как  $\angle HSC' = \angle BSC' = \angle A'SB'$ , отрезки  $SH$  и  $SB'$  симметричны относительно  $l$ . Значит, точка  $N$ , симметричная точке  $M$  относительно  $l$ , лежит на  $\gamma_B$  и на  $BB'$ , а дуги  $CM$  и  $NA'$  равны. Вписанные углы  $\angle C'BM$  и  $\angle A'BN$  опираются на эти дуги, т.е. равны. Итак,  $\angle ABM = \angle C'BM = \angle A'BN = \angle CBB'$ .

7. Нет. Предположим, что Коле удалось придумать способ наверняка угадать за 3 хода периметр многоугольника с точностью до 0,3. Для каждой из трех указанных Колей прямых Миша отвечает, пересекает ли эта прямая загаданный многоугольник. По предположению для каждого из 8 возможных наборов таких ответов Коля придуманным им способом определяет значение периметра с точностью до 0,3. Следовательно, настоящее значение периметра может принадлежать одному из 8 числовых отрезков суммарной длины не более  $8 \times 0,6 = 4,8$ . С другой стороны, периметр многоугольника из условия задачи может принимать любое значение из интервала  $(0; 2\pi)$  длины  $2\pi > 4,8$ . Следовательно, среди них найдется такой многоугольник, угадать периметр которого с требуемой точностью Коле не удастся.

### ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1.  $T = \frac{T_3 T_M}{T_M - T_3} \approx 779$  дней.
2. Лед занимает  $\eta = \frac{\rho}{\rho_{\text{л}} g h} = 0,1 = 10\%$  объема снега, воздух – весь остальной объем.
3.  $F = \frac{P}{3}$ .
4.  $\rho = \frac{\rho_B}{2} = 500 \text{ кг/м}^3$ .

**8 класс**

- $S = \frac{F_0}{\rho_0 g h_0} = 0,01 \text{ м}^2$ ;  $m = \frac{F_0}{g} = 1 \text{ кг}$ .
- $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $m = \rho_{\text{л}} V + m_{\text{в}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \left(1 + \frac{c_{\text{в}} t_{\text{в}}}{\lambda}\right) \approx 0,97 \text{ кг}$ .
- Конец «черного ящика» с катушкой притягивается к середине «черного ящика» с магнитом, а наоборот – нет. Кроме того, со временем «черный ящик» с катушкой нагревается, а поле катушки ослабевает.

**9 класс**

- $S = \frac{k}{\rho g} = 0,01 \text{ м}^2$ .
- $I_2 = I - \frac{U}{R_3} = 0,035 \text{ А}$ ,  $I_3 = \frac{U}{R_3} = 0,15 \text{ А}$ ,  
 $R_4 = \frac{R_1 (UR_3 - R_2 (IR_3 - U))}{(IR_3 - U)(R_1 + R_2)} \approx 59 \text{ Ом}$ .

**10 класс**

- $v = \frac{v_2 - v_1}{2} = 10 \text{ см/с}$ ;  $\tau = \frac{\pi L}{2(v_1 + v_2)} \approx 1 \text{ с}$ .
- Ускорение первого груза направлено вверх и равно  $a_1 = g/3$ , ускорение второго груза направлено вниз и равно  $a_2 = g/3$ , третий груз неподвижен.
- $\mu = \frac{v_0^2}{2gl(1 + m/M)}$ .
- $R_{BC} = R_{AC} + R_{BD} - R_{AD}$ .

**11 класс**

- $\omega_K = -\frac{\omega}{3}$ ;  $\omega_B = \frac{\omega}{4}$ ;  $\omega_{\Pi} = -\frac{\omega}{2}$ .
- $h = h_0 \frac{m_2^2 - m_1^2}{(m_1 + m_3)^2 - m_2^2}$ .
- $E_2 = 2E_1 = 2,8 \text{ МэВ}$ .
- а)  $0,4 \text{ л} = \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \leq V < \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left(1 + \frac{c_{\text{в}} t_{\text{в}}}{c_{\text{л}} |t_{\text{л}}| + \lambda}\right) = V_1 = 0,67 \text{ л}$ ;  
б)  $V > \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left(1 + \frac{c_{\text{в}} t_{\text{в}} + \lambda}{c_{\text{л}} |t_{\text{л}}|}\right) = V_2 = 6,7 \text{ л}$ ;  
в)  $0,67 \text{ л} = V_1 \leq V \leq V_2 = 6,7 \text{ л}$ .
- $\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2 - \omega^2 LC}}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Второй теоретический тур

**8 класс**

- $t_1 = \frac{L^2}{2vL_B} = 25 \text{ мин}$ ,  $t_2 = \frac{L^2}{2v(L - L_B)} = 37,5 \text{ мин}$ ;  
велосипедист отдыхал в Липовке в течение  
 $\Delta t = \frac{L^2(L - L_A - L_B)}{2vL_B(L - L_B)} = 12,5 \text{ мин}$ .
- $\rho_{\text{м}} = \rho + (\rho_{\text{в}} - \rho) \frac{l_1^2}{l_2^2} \approx 780 \text{ кг/м}^3$ .
- $\tau = \frac{V_0}{N_0 v} \left(\frac{ch\rho t}{m\lambda} + \frac{H}{V}\right) \approx 55 \text{ мин}$ .

**9 класс**

- $x = \frac{l}{12} = \frac{\pi R}{6}$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ;  $\mu > \text{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .
- Вольтметр  $V_2$  показывает меньшее напряжение;  
 $I_2 = I_1 \left(1 - \frac{U'}{U}\right) = 1,2 \text{ мА}$ ;  $U_0 = \frac{UU'}{U - U'} + U + U' = 1,9 \text{ В}$ .

- а)  $L = \frac{h}{\text{tg} \alpha}$ ; б)  $L = \frac{h}{\text{tg} 2\alpha}$  при  $\alpha < 45^\circ$ ,  $L = 0$  при  $\alpha > 45^\circ$ .

**10 класс**

- $h = \frac{9}{121} \frac{v^2}{g}$ ;  $\beta = \text{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{11} \approx 25^\circ$ .
- Ускорение груза 1 направлено вправо и равно

$$a_1 = \frac{2g}{(M_1 + m_1) \left( \frac{1}{M_1 + m_1} + \frac{1}{M_2 + m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)},$$

ускорение груза 2 направлено влево и равно

$$a_2 = \frac{2g}{(M_2 + m_2) \left( \frac{1}{M_1 + m_1} + \frac{1}{M_2 + m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)},$$

сила натяжения нити равна

$$T = \frac{2g}{\frac{1}{M_1 + m_1} + \frac{1}{M_2 + m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}.$$

**11 класс**

- $\alpha = \arccos \frac{g}{\omega^2 R} = 60^\circ$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2} BR^2 \left(1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2\right) \omega = 0,6 \text{ В}$ .
- $l_1 \approx \frac{1}{2} R \cos \alpha$ ,  $l_2 \approx R \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha}$ .

# журнал © Квант

**НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ**

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ**

**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия,  
М.Н.Голованова**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»  
Тел.: 930-56-48  
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,  
phys@kvant.info**

**Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат»  
142300 г.Чехов Московской области,  
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru  
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00  
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59**